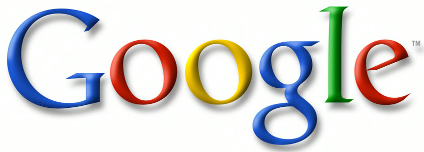




Stanford University Libraries
3 6105 000 820 485

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

12

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1889.
CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

SUR LE MOUVEMENT D'UN FIL DANS UN PLAN FIXE

PAR

P. APPELL

à PARIS.

La forme la plus simple sous laquelle on a pu jusqu'à présent mettre les équations du mouvement d'un fil flexible et inextensible dans un plan fixe a été indiquée par M. RESAL dans son *Traité de Mécanique Générale* (Tome I, pages 321 et suiv.). M. RESAL forme deux équations simultanées aux dérivées partielles de l'intégration desquelles dépend la solution du problème; puis il ajoute que l'élimination de la tension entre ces deux équations conduit à une équation aux dérivées partielles du *sixième ordre,* qui n'est d'ailleurs pas formée.

Dans le présent Mémoire, nous suivrons une méthode qui ne fait intervenir que les éléments essentiels de la question et qui ramène la recherche du mouvement du fil à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du *quatrième ordre.* En cherchant des solutions particulières de forme déterminée de cette équation on arrive à résoudre avec facilité plusieurs problèmes importants.

Nous divisons notre mémoire en trois parties: dans la première se trouvent établies les équations du mouvement, la seconde contient leur application à des cas particuliers, enfin la troisième est relative aux oscillations infiniment petites.

Nous avons indiqué la méthode que nous suivons ici dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 22 novembre 1886.

I.

Equations du mouvement.

1. Soit un fil flexible et inextensible mobile dans un plan fixe: désignons par x et y les coordonnées rectangulaires d'un élément ds de ce fil et par s la longueur du fil depuis un point déterminé du fil jusqu'à l'élément ds; appelons mds la masse de l'élément ds, T la tension de cet élément et $mXds$, $mYds$ les projections sur les axes coordonnés de la résultante des forces extérieures appliquées à ce même élément. Les équations du mouvement sont, comme il est bien connu,

$$(1)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dx}{ds}\right) + mX \\[2ex] m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dy}{ds}\right) + mY \\[2ex] \left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \end{cases}$$

où m est une fonction connue de s qui se réduit à une constante quand le fil est homogène. Ces équations définissent x, y et T en fonction des deux variables indépendantes s et t. L'intégration de ces trois équations simultanées aux dérivées partielles peut être ramenée à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre que l'on forme comme il suit.

Soit α l'angle que fait à l'instant t la tangente au fil en un point avec l'axe des abscisses: l'équation de cette tangente sera de la forme

$$x \sin\alpha - y\cos\alpha = \varphi(\alpha, t)$$

où $\varphi(\alpha, t)$ est une certaine fonction de l'angle α et du temps t. Pour éviter les signes d'intégration, désignons par p une fonction de α et t dont la dérivée partielle par rapport à α soit $\varphi(\alpha, t)$ et appelons p', p'', p''', p^{IV} les dérivées partielles des divers ordres de p par rapport à α. L'équation de la tangente au fil sera alors

$$(2)\qquad x\sin\alpha - y\cos\alpha = p',$$

et, pour avoir la forme du fil à l'instant t, il faudra chercher l'enveloppe de la droite (2) en laissant t constant et faisant varier α. On trouve ainsi, pour les coordonnées du point de contact, les expressions

(3) $$x = p' \sin\alpha + p'' \cos\alpha, \qquad y = -p' \cos\alpha + p'' \sin\alpha.$$

En convenant d'employer la lettre ∂ pour désigner les dérivées partielles prises par rapport à α et t considérées comme variables indépendantes, et de réserver la lettre d pour désigner les dérivées partielles prises par rapport aux variables indépendantes s et t, on aura

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = (p' + p''') \cos\alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = (p' + p''') \sin\alpha,$$

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2} = p' + p'''$$

et en intégrant

$$s = p + p''.$$

Il semble qu'en intégrant il faille ajouter au second membre une constante par rapport à α c'est à dire une fonction de t: mais cela est inutile, car la fonction p étant jusqu'à présent définie par cette seule condition que sa dérivée partielle par rapport à α égale une fonction $\varphi(\alpha, t)$

$$p' = \varphi(\alpha, t),$$

on a

$$p = \int \varphi(\alpha, t) d\alpha + \psi(t),$$

$\psi(t)$ désignant une fonction arbitraire de t; l'on pourra toujours choisir cette fonction arbitraire de t de telle façon que l'arc s compté à partir d'un point déterminé pris sur le fil ait pour expression

(4) $$s = p + p''.$$

Dans les équations (1), x, y et T sont considérées comme fonctions des variables indépendantes s et t; à l'aide de la relation (4) $s = p + p''$ on pourra exprimer x, y et T en fonction de α et t qui deviendront les nouvelles variables indépendantes.

Les règles élémentaires du changement de variables donnent

$$
(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{d\alpha}{ds}, \qquad \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{d\alpha}{ds}, \qquad \dfrac{dT}{ds} = \dfrac{\partial T}{\partial \alpha}\dfrac{d\alpha}{ds} \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{d\alpha}{dt}, \qquad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\dfrac{d\alpha}{dt}. \end{cases}
$$

L'angle α est une fonction de s et t définie par la relation

$$s = p + p''$$

qui donne, si on la différentie par rapport à s et t successivement,

$$1 = (p' + p''')\frac{d\alpha}{ds}, \qquad 0 = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t} + (p' + p''')\frac{d\alpha}{dt}$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{p' + p'''}, \qquad \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{\partial p''}{\partial t}}{p' + p'''}.$$

Les formules (2)

$$x = p' \sin\alpha + p'' \cos\alpha, \qquad y = -p' \cos\alpha + p'' \sin\alpha$$

donnent aussi

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = (p' + p''')\cos\alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = (p' + p''')\sin\alpha$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial t}\sin\alpha + \frac{\partial p''}{\partial t}\cos\alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial t}\cos\alpha + \frac{\partial p''}{\partial t}\sin\alpha.$$

On a donc enfin, en portant ces différentes expressions dans les formules (5) et réduisant

$$
(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad \dfrac{dy}{ds} = \sin\alpha, \qquad \dfrac{dT}{ds} = \dfrac{1}{p' + p'''}\dfrac{\partial T}{\partial \alpha} \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial p'}{\partial t}\sin\alpha - \dfrac{\partial p}{\partial t}\cos\alpha; \qquad \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\partial p'}{\partial t}\cos\alpha - \dfrac{\partial p}{\partial t}\sin\alpha, \end{cases}
$$

où les deux premières formules sont évidentes géométriquement.

On a de même

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds}, \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \cos\alpha\frac{d\alpha}{ds}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{d\alpha}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{d\alpha}{dt},$$

ce qui donne

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\sin\alpha}{p' + p'''}, \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\cos\alpha}{p' + p'''}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\sin\alpha - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\cos\alpha - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2\frac{\sin\alpha}{p' + p'''}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\cos\alpha - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\sin\alpha + \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2\frac{\cos\alpha}{p' + p'''}.$$

Les équations (1) du mouvement peuvent s'écrire

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = T\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} + mX$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = T\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dy}{ds} + mY;$$

en multipliant la première de ces équations par $\sin\alpha$, la deuxième par $-\cos\alpha$ et les ajoutant, après y avoir remplacé les différentes dérivées par les valeurs que nous venons de calculer, on obtient la relation

$$m\left[\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2\frac{1}{p' + p'''}\right] = -\frac{T}{p' + p'''} + m(X\sin\alpha - Y\cos\alpha);$$

en multipliant la première des équations du mouvement par $\cos\alpha$, la deuxième par $\sin\alpha$ et ajoutant, on obtient une seconde relation

$$-m\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial\alpha}\frac{1}{p' + p'''} + m(X\cos\alpha + Y\sin\alpha).$$

Les expressions $X\cos\alpha + Y\sin\alpha$, $-X\sin\alpha + Y\cos\alpha$ sont les composantes tangentielle et normale de la force extérieure rapportée à l'unité de masse: si nous les appelons, pour abréger, Φ et Ψ

$$\Phi = X\cos\alpha + Y\sin\alpha, \qquad \Psi = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$

nous aurons les deux équations suivantes

$$(7) \qquad \begin{cases} T = m\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2 - m(p' + p''')\left(\Psi + \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right) \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha} = -m(p' + p''')\left(\Phi + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right). \end{cases}$$

Dans le cas le plus général qui puisse se présenter, X et Y et, par suite, Φ et Ψ sont des fonctions données de x, y, α, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, s et t: à l'aide des relations (2), (4) et (6), on pourra exprimer Φ et Ψ en fonction de α, t, p et des dérivées partielles de p par rapport à α et t; de plus m étant une fonction donnée $f(s)$ de l'arc s, on aura

$$m = f(p + p'').$$

Donc les équations (7) seront deux équations simultanées définissant T et p en fonction de α et t. En éliminant T entre ces équations, on obtient une équation du quatrième ordre

$$(8) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[m\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2 - m(p' + p''')\left(\Psi + \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right) \right] + m(p' + p''')\left(\Phi + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right) = 0$$

qui définit p en fonction de α et t.

A toute intégrale particulière de cette équation correspond un mouvement possible du fil, à condition que la valeur de la tension T fournie par la première des équations (7) soit *positive*.

2. Avant de passer aux applications, je me propose de montrer rapidement comment les équations (7) peuvent être déduites de celles que donne M. Resal dans le premier volume de son *Traité de mécanique générale,* pages 321 et suivantes.

M. Resal désigne par v et u les composantes de la vitesse d'un point du fil suivant la tangente et la normale au fil, et par φ et ψ les

composantes suivant les mêmes directions de l'accélération du même point. On a donc

$$v = \frac{dx}{dt}\cos\alpha + \frac{dy}{dt}\sin\alpha, \qquad u = -\frac{dx}{dt}\sin\alpha + \frac{dy}{dt}\cos\alpha$$

$$\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\alpha, \qquad \psi = -\frac{d^2x}{dt^2}\sin\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\alpha.$$

D'après les expressions trouvées précédemment (formules 6 et suiv.) pour $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}$, on obtient

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &v = -\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad u = -\frac{\partial p'}{\partial t} \\ &\varphi = -\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \qquad \psi = -\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2 \frac{1}{p' + p'''}. \end{aligned} \right.$$

Les équations (4) de M. Resal (loc. cit. pag. 323), dans lesquelles on remplace ε par m, deviennent donc

$$\frac{dT}{ds} + m\left(\Phi + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right) = 0$$

$$T\frac{da}{ds} + m\left[\Psi + \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2 \frac{1}{p' + p'''}\right] = 0.$$

Les quantités s, α et t sont liées par la relation

$$s = p + p''$$

qui donne

$$1 = (p' + p''')\frac{da}{ds}, \qquad \frac{da}{ds} = \frac{1}{p' + p'''};$$

d'autre part, on a

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\partial T}{\partial a}\frac{da}{ds} = \frac{\partial T}{\partial a}\frac{1}{p' + p'''}.$$

En remplaçant $\frac{dT}{ds}$ et $\frac{da}{ds}$ par ces valeurs dans les équations ci-dessus, on retrouve les équations du mouvement (7).

Remarque. D'après les significations géométriques de p et p', il est facile d'établir géométriquement les formules

$$v = -\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad u = -\frac{\partial p'}{\partial t}.$$

3. Dans le cas particulier où les composantes Φ et Ψ ne dependent que de s et α, on peut transformer les équations du mouvement en deux autres définissant l'arc s et la tension T en fonction de α et t. Pour le montrer, rappelons les formules

$$s = p + p'', \qquad \rho = \frac{\partial s}{\partial \alpha} = p' + p'''$$

où ρ désigne le rayon de courbure du fil. Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{T}{m\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 - \Psi - \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}, \qquad \frac{1}{m\rho}\frac{\partial T}{\partial \alpha} = -\Phi - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

En différentiant la seconde de ces équations par rapport à α et la retranchant de la première, on a

$$\frac{1}{m\rho}\left(T - \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2}\right) - \frac{\partial \frac{1}{m\rho}}{\partial \alpha}\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 - \Psi + \Phi',$$

ce qui s'écrit aussi

$$T\left[\frac{1}{m\rho} + \frac{1}{\sqrt{m\rho}}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left(\frac{1}{\sqrt{m\rho}}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{m\rho}}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left(\frac{T}{\sqrt{m\rho}}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 - \Psi + \Phi'.$$

De même, en différentiant la première des équations ci-dessus par rapport à α et en l'ajoutant à la seconde, on a

$$\frac{2}{m\rho}\frac{\partial T}{\partial \alpha} + T\frac{\partial \frac{1}{m\rho}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2\right] - \Psi' - \Phi - \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{2}{\sqrt{m\rho}}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{T}{\sqrt{m\rho}}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2\right] - \Psi' - \Phi - \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Dans ces équations, Φ' et Ψ' désignent les dérivées de Φ et Ψ par rapport à α: par exemple, comme Φ dépend de α directement et par l'intermédiaire de s

$$\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial s}\rho.$$

Si l'on fait, pour simplifier

$$T = \sqrt{m\rho}\,\mathfrak{T},$$

il vient

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathfrak{T}\left[\dfrac{1}{\sqrt{m\rho}} + \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{m\rho}}\right)\right] - \dfrac{1}{\sqrt{m\rho}}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{T}}{\partial \alpha^2} = \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial s}{\partial t}\right)^2 - \Psi + \Phi' \\ \dfrac{2}{\sqrt{m\rho}}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left[\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial s}{\partial t}\right)^2\right] - \Psi' - \Phi - \dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} \end{cases}$$

équations qui définissent $\mathfrak{T}$ et s en fonction de α et t. Dans ces équations ρ est égal à $\frac{\partial s}{\partial \alpha}$ et m est une fonction donnée de s.

Lorsque la seule force extérieure est la pesanteur on a

$$\Phi = -g\sin\alpha, \qquad \Psi = -g\cos\alpha$$
$$\Psi' + \Phi = 0, \qquad \Phi' - \Psi = 0$$

et les équations (10) prennent la même forme que si la force extérieure était *nulle.*

4. *Equations d'équilibre.* — Pour trouver les équations d'équilibre du fil sous l'action des forces données, il suffit de chercher à vérifier les équations du mouvement (7) par une fonction p indépendante du temps t; en effet, le fil étant supposé en équilibre, les composantes tangentielle et normale

$$v = -\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad u = -\frac{\partial p'}{\partial t}$$

de la vitesse d'un point du fil doivent être *nulles,* donc p doit être indépendant de t. Dans cette hypothèse, les équations (7) deviennent

$$(11)\qquad \begin{cases} T = -m(p' + p''')\Psi \\ \dfrac{\partial T}{\partial \alpha} = -m(p' + p''')\Phi \end{cases}$$

d'où, par l'élimination de T

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}[m(p' + p''')\Psi] - m(p' + p''')\Phi = 0,$$

ce qui est une équation du quatrième ordre définissant p en fonction de α. Dans cette équation, m est une fonction donnée de s et Φ et Ψ des fonctions données de x, y, s, α:

$$m = f(s) = f(p + p'')$$

$$\Phi = \Phi(x, y, s, \alpha) = \Phi(p' \sin\alpha + p''\cos\alpha\,,\ -p'\cos\alpha + p''\sin\alpha\,, p + p'', \alpha)$$

$$\Psi = \Psi(x, y, s, \alpha) = \Psi(p' \sin\alpha + p''\cos\alpha\,,\ -p'\cos\alpha + p''\sin\alpha\,, p + p'', \alpha).$$

Les équations (11) résultent immédiatement des équations d'équilibre bien connues:

$$T = -m\rho\Psi, \qquad \frac{dT}{ds} = -m\Phi$$

où ρ désigne le rayon de courbure de la figure d'équilibre

$$\rho = \frac{\partial s}{\partial \alpha} = p' + p'''.$$

Nous n'avons rappelé ces équations qu'en vue de certains théorèmes qui se présenteront plus loin.

Dans le cas particulier où la force extérieure dépendrait uniquement de s et α

$$\Phi = \Phi(s, \alpha), \qquad \Psi = \Psi(s, \alpha),$$

il serait plus simple de prendre, dans les équations d'équilibre, s comme fonction inconnue de α: l'on aurait alors pour déterminer s en fonction de α, l'équation du *second ordre*

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(m\Psi\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right) - m\frac{\partial s}{\partial \alpha}\Phi = 0,$$

où

$$m = f(s), \qquad \frac{\partial m}{\partial \alpha} = f'(s)\frac{\partial s}{\partial \alpha}.$$

C'est le cas qui se présente quand la seule force extérieure est la pesanteur.

Dans ce dernier cas, les équations (10) donnent immédiatement pour l'équilibre

$$\mathfrak{T} = \text{const.}, \qquad \frac{1}{\sqrt{m\rho}} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left(\frac{1}{\sqrt{m\rho}}\right) = 0$$

$$m\rho = \frac{C}{\cos^2(\alpha - \alpha_0)}, \qquad \int m\,ds = C \operatorname{tang}(\alpha - \alpha_0).$$

En revenant aux équations du mouvement, nous allons tâcher d'en trouver des solutions particulières ayant des significations simples.

II.

Applications à quelques problèmes.

5. Dans les applications des équations précédentes, nous aurons fréquemment à résoudre un problème que l'on peut énoncer comme il suit:

Soient deux variables indépendantes α et t, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des fonctions de la variable α seule, $T_1, T_2, \ldots, T_n$ des fonctions de la variable t seule; que doivent être ces fonctions pour qu'il puisse exister entre elles une relation de la forme

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 + \ldots + A_n T_n = 0 \tag{12}$$

ayant lieu quelles que soient α et t?

Nous donnerons la solution pour le cas de $n = 4$, en remarquant que le cas où n aurait une valeur différente se traiterait exactement de la même façon.

Soit donc à vérifier la relation

$$A_1 T_1 + A_2 T_2 + A_3 T_3 + A_4 T_4 = 0 \tag{13}$$

quelles que soient α et t. Différentes hypothèses se présentent:

1°) Supposons d'abord les fonctions A_1, A_2, A_3, A_4 *linéairement indépendantes*, c'est à dire supposons qu'il n'y ait entre elles *aucune* relation

linéaire homogène à coefficients constants (indépendants de α). Alors la relation supposée (13) ne pourra être vérifiée que si l'on a

$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0,$$

et les fonctions A_1, A_2, A_3, A_4 seront arbitraires.

2°) Supposons qu'il existe entre les fonctions A_1, A_2, A_3, A_4 *une et une seule* relation linéaire homogène à coefficients constants

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 = 0.$$

Comme les quatre coefficients k_1, k_2, k_3, k_4 ne sont pas tous nuls, supposons, pour fixer les idées, k_1 différent de zéro; nous pourrons alors résoudre cette relation par rapport à A_1 et porter la valeur de A_1 dans l'équation (13) qui deviendra

$$A_2(k_1 T_2 - k_2 T_1) + A_3(k_1 T_3 - k_3 T_1) + A_4(k_1 T_4 - k_4 T_1) = 0.$$

Puisque les fonctions A_2, A_3, A_4 sont linéairement indépendantes, les coefficients de A_2, A_3, A_4 dans cette dernière équation doivent être nuls; ce qui donne

$$\frac{T_1}{k_1} = \frac{T_2}{k_2} = \frac{T_3}{k_3} = \frac{T_4}{k_4}.$$

3°) Supposons qu'il existe entre les fonctions A_1, A_2, A_3, A_4 *deux et seulement deux* relations linéaires homogènes distinctes à coefficients constants

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 = 0$$
$$h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3 + h_4 A_4 = 0.$$

Comme tous les déterminants $k_i h_j - k_j h_i$ ne peuvent pas être nuls, supposons $k_1 h_2 - h_1 k_2$ différent de zéro. Nous pourrons alors résoudre les deux relations précédentes par rapport à A_1 et A_2 ce qui nous donnera des expressions de la forme

$$A_1 = \lambda_1 A_3 + \mu_1 A_4, \qquad A_2 = \lambda_2 A_3 + \mu_2 A_4,$$

$\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ étant des constantes faciles à exprimer à l'aide des con-

stantes k_i, h_j. Portons ces expressions de A_1 et A_2 dans l'équation (13); nous aurons

$$A_3(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + T_3) + A_4(\mu_1 T_1 + \mu_2 T_2 + T_4) = 0.$$

Comme les fonctions A_3 et A_4 sont linéairement indépendantes, il faudra que l'on ait

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + T_3 = 0$$

$$\mu_1 T_1 + \mu_2 T_2 + T_4 = 0.$$

4°) S'il y a, entre les fonctions A_1, A_2, A_3, A_4 *trois relations* linéaires homogènes distinctes à coefficients constants, on en conclura

$$\frac{A_1}{h_1} = \frac{A_2}{h_2} = \frac{A_3}{h_3} = \frac{A_4}{h_4}$$

h_1, h_2, h_3, h_4 étant des constantes; l'équation (13) donne alors

$$h_1 T_1 + h_2 T_2 + h_3 T_3 + h_4 T_4 = 0.$$

5°) Enfin si l'on a

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$$

les fonctions T_1, T_2, T_3, T_4 sont arbitraires.

6. Revenons maintenant à la question de mécanique et supposons que la force extérieure appliquée à un élément du fil dépende uniquement de la position de cet élément c'est à dire de ses coordonnées et de son orientation; alors X et Y seront des fonctions de x, y et α, et il en sera de même de Φ et Ψ de sorte que l'on aura

$$\Phi = \Phi(x, y, \alpha) = \Phi(p' \sin\alpha + p'' \cos\alpha, -p' \cos\alpha + p'' \sin\alpha, \alpha)$$

$$\Psi = \Psi(x, y, \alpha) = \Psi(p' \sin\alpha + p'' \cos\alpha, -p' \cos\alpha + p'' \sin\alpha, \alpha).$$

Cherchons si, dans ces conditions, *le mouvement du fil peut consister en un glissement le long d'une courbe géométrique fixe,* ou, en d'autres termes, *si le fil peut affecter une figure de repos apparent dans l'espace.*

Pour cela, il faut et il suffit que la composante u de la vitesse de chaque point du fil normalement au fil soit nulle. Comme on a trouvé

$$u = -\frac{\partial p'}{\partial t},$$

pour que u soit constamment nul pour chaque point du fil, il faut et il suffit que la fonction p de α et t soit de la forme

$$p = A + \theta$$

où A dépend de α seulement et θ de t seulement. En désignant par $A', A'', \ldots, \theta', \theta'', \ldots$ les dérivées des fonctions A et θ par rapport aux variables α et t respectivement, nous aurons

$$p' = A', \qquad p'' = A'', \quad \ldots$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \theta', \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \theta'', \quad \ldots$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial p''}{\partial t} = 0, \quad \ldots .$$

Portant ces valeurs dans l'équation du mouvement (8), on obtient l'équation

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}[m\theta'^2 - m(A' + A''')\Psi] + m(A' + A''')(\Phi + \theta'') = 0,$$

dans laquelle m est une fonction donnée de s

$$m = f(s) = f(p + p'') = f(A + A'' + \theta)$$

tandis que Φ et Ψ sont des fonctions de la seule variable α

$$\Phi = \Phi(A' \sin\alpha + A'' \cos\alpha\,, -A' \cos\alpha + A'' \sin\alpha\,, \alpha)$$

$$\Psi = \Psi(A' \sin\alpha + A'' \cos\alpha\,, -A' \cos\alpha + A'' \sin\alpha\,, \alpha).$$

Nous examinerons successivement le cas où le fil est homogène et le cas où le fil est hétérogène.

a) Le fil est homogène; *m est une constante*. Ce cas a été examiné

par M. LÉAUTÉ.[1] L'équation (14) devient alors, après suppression du facteur m,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[(A' + A''')\Psi] - (A' + A''')(\Phi + \theta'') = 0$$

ou bien

$$\theta'' = -\Phi + \frac{1}{A' + A'''}\frac{\partial}{\partial\alpha}[(A' + A''')\Psi].$$

Le premier membre qui ne dépend que de t ne peut être égal au second qui ne dépend que de α, que si les deux membres sont constants. Donc on a

$$\theta'' = K, \qquad \theta' = Kt + K_1, \qquad \theta = \frac{1}{2}Kt^2 + K_1 t + K_2$$

K, K_1, K_2 désignant des constantes; puis

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}[(A' + A''')\Psi] - (A' + A''')(\Phi + K) = 0.$$

En intégrant cette dernière équation on aura A en fonction de α: alors p sera donné par

$$p = A + \theta = A + \frac{1}{2}Kt^2 + K_1 t + K_2$$

et la tension par la première des formules (7) qui devient, dans le cas actuel,

$$T = m\theta'^2 - m(A' + A''')\Psi = m(Kt + K_1)^2 - m(A' + A''')\Psi.$$

La composante tangentielle de la vitesse d'un point du fil est

$$v = -\frac{\partial p}{\partial t} = -\theta' = -Kt - K_1;$$

elle varie proportionnellement au temps. De plus la courbe suivant laquelle est disposé le fil, c'est à dire *la figure de repos apparent du fil,* est définie par les équations

$$x = A'\sin\alpha + A''\cos\alpha, \qquad y = -A'\cos\alpha + A''\sin\alpha$$

---

[1] Comptes rendus, 10 novembre 1879; Bulletin de la Société Philomathique, 18 novembre 1879.

dans lesquelles A satisfait à l'équation (15); et cette équation n'est autre chose que l'équation d'équilibre du fil (N° 4) dans laquelle p se trouve remplacé par A et la composante tangentielle Φ par $\Phi + K$. En résumé:

Lorsque les forces extérieures appliquées à un fil homogène dépendent seulement de la position de l'élément du fil et que le fil conserve une figure permanente, la vitesse de glissement du fil est proportionnelle au temps, et la forme permanente du fil en mouvement est la figure d'équilibre que prendrait le fil si la composante normale de la force extérieure restait la même et si la composante tangentielle était augmentée d'une constante égale à l'accroissement de la vitesse de glissement pendant l'unité de temps.

Par exemple, si l'on suppose que la seule force extérieure soit la pesanteur, on aura, en prenant pour axe des coordonnées y une verticale dirigée vers le haut,

$$X = 0, \qquad Y = -g,$$

$$\Phi = -g \sin\alpha, \qquad \Psi = -g\cos\alpha;$$

et l'équation (15) deviendra

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[(A' + A''')\cos\alpha] - (A' + A''')\left(\sin\alpha - \frac{K}{g}\right) = 0,$$

d'où en intégrant

$$A' + A''' = \frac{C}{\cos^2\alpha}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]^{-\frac{K}{g}}$$

C étant une constante arbitraire. On a alors, pour déterminer A, une équation linéaire à coefficients constants avec second membre. L'équation que nous venons de trouver est ce que l'on appelle quelquefois l'équation intrinsèque de la courbe le long de laquelle glisse le fil. En effet, la quantité $A' + A'''$ est égale à $\frac{\partial s}{\partial\alpha}$ c'est à dire au rayon de courbure ρ de la courbe: l'équation ci-dessus donne donc ρ en fonction de α: dans le cas particulier où $K = 0$, elle se réduit à

$$\rho = \frac{C}{\cos^2\alpha},$$

équation intrinsèque de la chaînette.

b) Le fil étant hétérogène, on aura,

$$m = f(s) = f(p + p''), \qquad \frac{\partial m}{\partial \alpha} = (p' + p''')f'(p + p'')$$

en appelant $f'(s)$ la dérivée de la fonction $f(s)$. Posons pour abréger

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \tilde{\omega}(s),$$

et remarquons que

$$p + p'' = A + A'' + \theta,$$

nous aurons d'après l'équation (14)

$$(16) \quad (A' + A''')[\theta'^2 - (A' + A''')\Psi]\tilde{\omega}(A + A'' + \theta) - \frac{\partial}{\partial \alpha}[(A' + A''')\Psi] + (A' + A''')(\Phi + \theta'') = 0.$$

Telle est l'équation qu'il faudrait chercher à vérifier en mettant pour A une fonction de α et pour θ une fonction de t. Le problème pourra avoir une solution ou n'en pas avoir suivant la forme de la fonction $\tilde{\omega}$. Si $\tilde{\omega}(s)$ était une fonction *rationnelle* de s, l'équation (16) serait une relation de la forme (12) du N° 5 et on pourrait lui appliquer les considérations développées dans ce N° 5.

Le résultat est simple si l'on suppose la fonction $\tilde{\omega}(s)$ égale à une constante c, c'est à dire

$$m = e^{c(s-s_0)}.$$

On a alors, en posant $A' + A''' = \rho$, l'équation

$$(16') \qquad c\rho\theta'^2 + \rho\theta'' + \rho(\Phi - c\rho\Psi) - \frac{\partial}{\partial \alpha}(\rho\Psi) = 0$$

qui rentre dans la forme (12) où $n = 2$, en faisant

$$A_1 = \rho, \qquad A_2 = \rho(\Phi - c\rho\Psi) - \frac{\partial}{\partial \alpha}(\rho\Psi)$$

$$T_1 = c\theta'^2 + \theta'', \qquad T_2 = 1.$$

Il est impossible que les fonctions A_1, A_2 soient linéairement indépendantes, car il faudrait alors que les fonctions T_1, T_2 soient *nulles* et on

a $T_2 = 1$. Ainsi il existe au moins une relation linéaire homogène à coefficients constants entre A_1 et A_2: d'autre part il n'en peut exister qu'une, car autrement on aurait

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = 0,$$

ce qui est impossible, la relation

$$\rho = A' + A''' = 0$$

ne définissant pas une courbe mais un point.

La façon la plus générale de satisfaire à l'équation (16') est donc de supposer qu'il existe une relation linéaire homogène à coefficients constants entre les deux fonctions A_1 et A_2, c'est à dire de supposer

$$\frac{A_1}{k_1} = \frac{A_2}{k_2};$$

on aurait alors

$$k_1 T_1 + k_2 T_2 = 0.$$

D'après les expressions de A_1, A_2, T_1, T_2 et en faisant

$$k_2 = bck_1,$$

on aura, pour définir la figure permanente du fil, l'équation

$$-bc\rho + \rho(\Phi - c\rho\Psi) - \frac{\partial}{\partial a}(\rho\Psi) = 0,$$

et, pour définir θ, l'équation

$$c\theta'^2 + \theta'' + bc = 0$$

d'où l'on tire facilement θ' par une tangente trigonométrique ou hyperbolique suivant que la constante b est positive ou négative. Cette solution comprend, comme cas particulier intéressant, celle que l'on obtient en faisant

$$b = -K^2, \qquad \theta' = K.$$

Dans le cas particulier où b est nul on a

$$\frac{\theta''}{\theta'^2} + c = 0, \qquad \theta = \frac{1}{c}\log(t - t_0) + K.$$

La figure de repos apparent est alors définie par l'équation

$$\rho(\Phi - c\rho\Psi) - \frac{\partial}{\partial\alpha}(\rho\Psi) = 0,$$

identique à l'équation d'équilibre (page 10).

Remarque. Le problème de M. Léauté et le problème plus général que nous venons de traiter peuvent encore être résolus lorsque la force extérieure au lieu de dépendre seulement de la position de l'élément varie proportionnellement quand, x, y, α restant constants, le temps t change. Dans ce cas on aura pour Φ et Ψ des expressions de la forme

$$\Phi = \theta_1 \Phi_1, \qquad \Psi = \theta_1 \Psi_1,$$

θ_1 dépendant de t seul, Φ_1 et Ψ_1 de x, y et α. L'équation (14), pour le cas du fil homogène, donne alors

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[(A' + A''')\Psi_1] - (A' + A''')\left[\Phi_1 + \frac{\theta''}{\theta_1}\right] = 0$$

d'où l'on conclut, comme précédemment

$$\frac{\theta''}{\theta_1} = K, \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}[(A' + A''')\Psi_1] - (A' + A''')[\Phi_1 + K] = 0.$$

La figure de repos apparent est alors la figure d'équilibre d'un fil sollicité par la composante normale Ψ_1, et la composante tangentielle $\Phi_1 + K$; quant à la vitesse de glissement, elle est

$$\theta' = \int K\theta_1 dt.$$

7. Le problème que nous venons de résoudre est un cas particulier du suivant:[1]

Chercher s'il existe un mouvement du fil pouvant se représenter par le glissement du fil le long d'une courbe de forme invariable animée d'un mouvement de translation, et déterminer ce mouvement du fil s'il existe.

Dans cette hypothèse, les coordonnées d'un point du fil doivent s'exprimer en fonction de α et t par des expressions de la forme

$$x = \xi + f(\alpha), \qquad y = \eta + g(\alpha),$$

ξ et η étant des fonctions de t seul, $f(\alpha)$ et $g(\alpha)$ des fonctions de α seul. Comme on a

$$p' = x \sin\alpha - y \cos\alpha$$

on voit que dans le cas actuel on devra avoir

$$p' = \xi \sin\alpha - \eta \cos\alpha + f(\alpha) \sin\alpha - g(\alpha) \cos\alpha$$

d'où

$$p = -\xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha + A + \theta$$

A étant une fonction de α seul, ξ, η, θ des fonctions de t seul. Nous désignerons par $A', A'', \ldots$ les dérivées de A par rapport à α, et par $\xi', \eta', \theta', \xi'', \eta'', \theta'', \ldots$ les dérivées de ξ, η, θ par rapport à t. La forme de la courbe le long de laquelle glisse le fil est définie par la fonction A; car l'équation intrinsèque de cette courbe est

$$\rho = p' + p''' = A' + A'''.$$

Le mouvement de translation de cette courbe est connu quand on connaît ξ et η en fonction de t; enfin la vitesse de glissement du fil le long

---

[1] Routh, *Advanced rigid Dynamics:* On steady motion, p. 299.

de cette courbe est $-\theta'$. Cette dernière propriété résulte de ce que les projections de la vitesse d'un point du fil données par les formules générales

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial p'}{\partial t}\sin\alpha - \frac{\partial p}{\partial t}\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial p'}{\partial t}\cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial t}\sin\alpha$$

ont actuellement pour expressions, d'après la forme particulière supposée pour p,

$$\frac{dx}{dt} = \xi' - \theta'\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = \eta' - \theta'\sin\alpha;$$

ces formules montrent que la vitesse d'un point du fil est la résultante d'une vitesse de translation ayant pour projections ξ' et η' et d'une vitesse de glissement $-\theta'$ dirigée suivant la tangente.

Les coordonnées d'un point de la courbe le long de laquelle glisse le fil sont alors

$$x = \xi + A'\sin\alpha + A''\cos\alpha, \qquad y = \eta - A'\cos\alpha + A''\sin\alpha$$

et l'on a

$$s = p + p'' = A + A'' + \theta, \qquad \rho = p' + p''' = A' + A'''.$$

Comme le fil est en repos apparent par rapport à des axes de directions fixes menés par le point (ξ, η), le mouvement relatif du fil par rapport à ces axes est du genre de ceux qu'a étudiés M. LÉAUTÉ et dont nous nous sommes occupés dans le numéro précédent.

Si l'on suppose m constant, l'équation du mouvement devient

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\theta'^2 - (A' + A''')(\Psi + \xi''\sin\alpha - \eta''\cos\alpha)]$$
$$+ (A' + A''')(\Phi - \xi''\cos\alpha - \eta''\sin\alpha + \theta'') = 0$$

ou, en développant

(17) $$(A'' + A^{\text{IV}})(\Psi + \xi''\sin\alpha - \eta''\cos\alpha)$$
$$-(A' + A''')\left(\Phi - \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} - 2\xi''\cos\alpha - 2\eta''\sin\alpha + \theta''\right) = 0.$$

Il faudrait vérifier cette équation en y mettant pour A une fonction convenable de α et pour ξ, η, θ des fonctions convenables de t.

Si Φ et Ψ sont des fonctions rationnelles de x et y, on sera conduit à une équation de la forme (12) que l'on traitera comme nous l'avons indiqué dans le N° 5.

Nous allons traiter complètement un cas simple, à savoir le cas où Φ et Ψ seraient fonctions du seul angle α, comme il arriverait par exemple si la seule force extérieure était la pesanteur.

Désignons, comme plus haut, par ρ le rayon de courbure $A' + A'''$ et par ρ' sa dérivée $A'' + A^{\text{IV}}$ et posons

$$A_1 = \rho'\Psi - \rho\left(\Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right), \qquad A_2 = \rho' \sin\alpha + 2\rho\cos\alpha,$$

$$A_3 = -\rho'\cos\alpha + 2\rho\sin\alpha, \qquad A_4 = -\rho$$

$$T_1 = 1, \qquad T_2 = \xi'', \qquad T_3 = \eta'', \qquad T_4 = \theta''.$$

L'équation (17) qu'il s'agit de vérifier est alors de la forme

$$A_1T_1 + A_2T_2 + A_3T_3 + A_4T_4 = 0 \tag{13}$$

examinée en détail dans le N° 5. Nous allons reprendre successivement les diverses hypothèses indiquées dans ce N° 5.

1°) Tous les T_i ne peuvent pas être nuls, car le premier T_1 est 1.

2°) Supposons qu'il y ait *une* relation linéaire homogène à coefficients constants entre A_1, A_2, A_3, A_4

$$k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k_4A_4 = 0.$$

Alors on a

$$\frac{1}{k_1} = \frac{\xi''}{k_2} = \frac{\eta''}{k_3} = \frac{\theta''}{k_4}.$$

On peut supposer k_1 égal à l'unité et on a pour ξ'', η'', θ'' des valeurs constantes

$$\xi'' = k_2, \qquad \eta'' = k_3, \qquad \theta'' = k_4.$$

Quant à la figure de repos apparent par rapport aux axes mobiles de directions fixes menés par le point (ξ, η), elle est donnée par l'équation différentielle

$$A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 = 0$$

c'est à dire

$$\rho' \Psi - \rho\left(\Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right) + k_2(\rho' \sin\alpha + 2\rho\cos\alpha) + k_3(-\rho'\cos\alpha + 2\rho\sin\alpha) - k_4\rho = 0$$

qui définit ρ et par suite A en fonction de α: la détermination de ρ et A est ramenée à des quadratures.

Dans la solution que nous trouvons ainsi et qui est évidente a priori, les axes mobiles de directions fixes menés par le point (ξ, η) sont animés d'un mouvement de translation *uniformément accéleré;* la figure de repos apparent du fil par rapport à ces axes est la figure d'équilibre que prendrait le fil si l'on ajoutait, aux forces agissant réellement Φ et Ψ, une force (force centrifuge) ayant pour projections sur les axes $-k_2$ et $-k_3$ et une force tangentielle k_4; la vitesse de glissement du fil $-\theta'$ varie proportionnellement au temps. Ce résultat s'applique immédiatement au mouvement d'un fil homogène pesant dans un plan sur lequel il glisse sans frottement.

Nous pouvons, par exemple, appliquer cette méthode au problème traité par M. Routh dans l'ouvrage déja cité *Advanced rigid Dynamics,* page 300, § 525 *Form of an electric cable,* problème qui peut s'énoncer ainsi: Un cable est déposé sur le fond horizontal d'une mer par un bateau animé d'un mouvement rectiligne uniforme, la longueur du cable déposé pendant un intervalle de temps quelconque étant égale à la quantité dont avance le bateau dans le même temps; trouver la forme du cable supposée permanente.

D'après l'hypothèse, cette forme du cable est permanente par rapport à un système d'axes mobiles situés dans un plan vertical et entraînés avec le mouvement du bateau. L'origine (ξ, η) de ces axes sera donc animée d'un mouvement rectiligne uniforme et en prenant un axe des x horizontal on aura

$$\eta = 0, \qquad \xi = ct$$

c désignant la vitesse du bateau. La vitesse de glissement du fil le long de la courbe géométrique suivant laquelle il reste disposée étant égale à c, on a

$$\theta' = c, \qquad \theta = ct.$$

Les quantités η'', ξ'', θ'' sont donc nulles actuellement ainsi que les constantes k_2, k_3, k_4 et l'équation définissant la figure permanente du fil est

$$\rho'\Psi - \rho\left(\Phi - \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right) = 0.$$

Supposons que la résistance de l'eau sur un élément du cable soit dirigée en sens contraire de la vitesse de cet élément et proportionnelle à cette vitesse, et appelons g' la pesanteur apparente du cable dans l'eau: les composantes tangentielle et normale de la résistance seront de la forme $-\mu v$ et $-\mu u$, v et u désignant comme précédemment les composantes tangentielle et normale de la vitesse d'un élément; puis les composantes tangentielle et normale de la pesanteur g' seront

$$-g'\sin\alpha, \qquad -g'\cos\alpha.$$

On aura donc

$$\Phi = -g'\sin\alpha - \mu v = -g'\sin\alpha + \mu\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\Psi = -g'\cos\alpha - \mu u = -g'\cos\alpha + \mu\frac{\partial p'}{\partial t}$$

car

$$v = -\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad u = -\frac{\partial p'}{\partial t}.$$

Comme actuellement

$$p = -\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha + A + \theta = -ct\cos\alpha + A + ct,$$

on a

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -c\cos\alpha + c, \qquad \frac{\partial p'}{\partial t} = c\sin\alpha$$

et il vient

$$\Phi = -g'(\sin\alpha + e\cos\alpha - e),$$
$$\Psi = -g'(\cos\alpha - e\sin\alpha)$$

en posant

$$e = \frac{\mu c}{g'}.$$

L'équation différentielle devient alors

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{2\sin\alpha + 2e\cos\alpha - e}{\cos\alpha - e\sin\alpha}$$

d'où

$$\log\rho = -2\log(\cos\alpha - e\sin\alpha) - e\int\frac{d\alpha}{\cos\alpha - e\sin\alpha}$$

$$\rho = \frac{G}{(\cos\alpha - e\sin\alpha)^2}\cdot\left[\frac{\sqrt{1+e^2} - e - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1+e^2} + e + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right]^{\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}};$$

ce qui est l'équation intrinsèque de la courbe.

3°) A côté de la solution générale précédente qui convient quelles que soient les expressions données de Φ et Ψ en fonction de α, il peut s'en présenter d'autres pour des lois particulières de forces. Nous les trouverons en supposant qu'il existe entre les fonctions A_1, A_2, A_3, A_4 *deux relations* linéaires homogènes distinctes à coefficients constants

$$k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k_4A_4 = 0$$
$$h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3 + h_4A_4 = 0.$$

Nous verrons, dans l'examen du cas suivant, que k_1 et h_1 ne peuvent pas être nuls en même temps; on peut aussi s'assurer que les déterminants

$$k_1h_2 - h_1k_2, \qquad k_1h_3 - h_1k_3$$

ne peuvent pas être nuls en même temps, car s'ils étaient nuls on aurait, en éliminant A_1 entre les deux relations supposées,

$$(k_1h_4 - h_1k_4)A_4 = 0$$

d'où

$$A_4 = 0,$$

puisque les deux relations supposées sont distinctes. Mais A_4 qui est égal à $-\rho$, ne peut pas être nul, donc les deux déterminants

$$k_1 h_2 - h_1 k_2, \qquad k_1 h_3 - h_1 k_3,$$

ne peuvent pas être nuls en même temps. Supposons le premier de ces déterminants différent de zéro et résolvons les deux relations linéaires par rapport à A_1 et A_2: nous aurons

$$(18) \qquad \begin{aligned} A_2 &= C_1 A_3 + C_2 A_4 \\ A_1 &= E_1 A_3 + E_2 A_4 \end{aligned}$$

C_1, C_2, E_1, E_2 étant des constantes. En remplaçant A_2, A_3, A_4 par leurs valeurs, on écrit la première de ces relations (18)

$$\rho' \sin\alpha + 2\rho\cos\alpha = C_1(-\rho'\cos\alpha + 2\rho\sin\alpha) - C_2\rho$$

ou en posant

$$C_1 = \operatorname{tg}\beta, \qquad C_2\cos\beta = -c,$$

on a

$$\rho'\sin(\alpha+\beta) + 2\rho\cos(\alpha+\beta) - c\rho = 0.$$

Intégrons cette équation et désignons par G une constante, nous obtiendrons

$$\rho = \frac{G}{\sin^2(\alpha+\beta)}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]^c,$$

ce qui est l'équation intrinsèque de la courbe le long de laquelle glisse le fil. Cette valeur de ρ devra vérifier la seconde des équations (18). En exprimant ce fait, nous aurons une relation entre les composantes Φ et Ψ; de sorte que, comme nous l'avons déjà dit, le cas actuel ne peut se présenter que pour certaines lois spéciales de la force extérieure.

Pour obtenir, sous la forme la plus simple, la relation entre Φ et

Ψ, remarquons que l'on peut toujours faire tourner les axes de façon à amener la constante β à être nulle: alors

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = -c$$

$$\rho = \frac{G}{\sin^2\alpha}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^c.$$

La seconde des équations (18) devient si l'on y remplace A_1, A_3, A_4 par leurs valeurs

$$\rho'\Psi - \rho\left(\Phi - \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right) = E_1(-\rho'\cos\alpha + 2\rho\sin\alpha) - E_2\rho;$$

d'où l'on tire, en remplaçant $\frac{\rho'}{\rho}$ par la valeur que l'on vient de trouver

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{c - 2\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$(19) \quad (\Psi + E_1\cos\alpha)(c - 2\cos\alpha) - \left(\Phi - \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} + 2E_1\sin\alpha - E_2\right)\sin\alpha = 0.$$

Telle est la relation qui devra lier les composantes Φ et Ψ.

Les relations (18) donnent, puisque $C_1 = 0$ et $C_2 = -c$,

$$A_2 = -cA_4, \qquad A_1 = E_1A_3 + E_2A_4,$$

et en portant dans la relation

$$A_1T_1 + A_2T_2 + A_3T_3 + A_4T_4 = 0,$$

$$A_3(E_1T_1 + T_3) + A_4(E_2T_1 - cT_2 + T_4) = 0.$$

Mais, les fonctions A_3 et A_4 étant linéairement indépendantes, cette relation ne peut avoir lieu que si l'on a simultanément

$$E_1T_1 + T_3 = 0, \qquad E_2T_1 - cT_2 + T_4 = 0$$

c'est à dire, en remplaçant T_1, T_2, T_3, T_4 par leurs valeurs $1, \xi'', \eta'', \theta''$

$$E_1 + \eta'' = 0, \qquad E_2 - c\xi'' + \theta'' = 0;$$

d'où l'on tire enfin

$$\eta = -\frac{1}{2} E_1 t^2 + E_1' t + E_1''$$

$$\theta = c\xi - \frac{1}{2} E_2 t^2 + E_2' t + E_2''$$

E_1', E_1'', E_2', E_2'' désignant des constantes arbitraires.

On voit que η est une fonction du second degré de t; quant à ξ on peut le choisir *arbitrairement* en fonction de t, θ est alors déterminé par la seconde des équations précédentes.

Ainsi, en supposant les composantes Φ et Ψ liées par la relation (19), on aura un mouvement permanent du fil dans lequel le fil est constamment disposé suivant la courbe[1] ayant pour équation intrinsèque

$$\rho = \frac{G}{\sin^2 \alpha} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^c$$

et glisse avec une vitesse $-\theta'$ le long de cette courbe supposée invariablement liée à des axes mobiles de directions fixes passant par le point (ξ, η).

Cette solution pourrait aussi être obtenue par la théorie du mouvement relatif associée à la remarque de la page 19.

Elle s'applique au cas important où la seule force donnée est la pesanteur: en effet on a alors

$$\Phi = -g \sin \alpha, \qquad \Psi = -g \cos \alpha,$$

de sorte que la relation (19) est vérifiée si l'on fait

$$E_1 = g, \qquad E_2 = 0:$$

on a de plus, d'après les valeurs générales de ξ, η, θ

$$\eta'' = -g, \qquad \theta'' = c\xi'',$$

d'où

$$\eta = \eta_0 - \frac{g}{2}(t - t_0)^2, \qquad \theta = c\xi + c't + c'',$$

---

[1] Cette courbe est celle que nous avons déjà trouvée à la page 16.

ξ étant une fonction arbitraire de t. On peut donc dire que l'équation du mouvement d'un fil homogène pesant dans un plan fixe

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2-(p'+p''')\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}-g\cos\alpha\right)\right]+(p'+p''')\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-g\sin\alpha\right)=0$$

admet l'intégrale

$$p=-\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha+A+\theta$$

c'est à dire

$$p=\xi(c-\cos\alpha)-\left[\eta_0-\frac{1}{2}g(t-t_0)^2\right]\sin\alpha+A+c't+c''$$

où ξ est une fonction *arbitraire* de t, c, c', c'' des constantes arbitraires et A une fonction de α définie par l'équation

$$\rho=A'+A'''=\frac{G}{\sin^2\alpha}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^c;$$

ce qu'il est aisé de vérifier directement.

4°) Enfin, s'il existe trois relations linéaires homogènes à coefficients constants entre A_1, A_2, A_3, A_4 ou deux relations linéaires homogènes à coefficients constants entre A_2, A_3, A_4 on en déduira

$$\frac{A_2}{k_2}=\frac{A_3}{k_3}=\frac{A_4}{k_4}$$

k_2, k_3, k_4 étant des constantes, c'est à dire

$$\frac{\rho'\sin\alpha+2\rho\cos\alpha}{k_2}=\frac{-\rho'\cos\alpha+2\rho\sin\alpha}{k_3}=-\frac{\rho}{k_4};$$

d'où l'on tire par l'élimination de $\frac{\rho'}{\rho}$ une valeur *constante* pour α, ce qui est *impossible* puisque, dans tous nos calculs, α est pris pour variable *indépendante.*

Cependant ce résultat suggère l'idée que le fil peut affecter la forme d'une ligne droite de direction fixe. On verra sans peine si un pareil mouvement est possible en cherchant à vérifier les équations primitives (1) en posant

$$x=\xi+s\cos\alpha,\qquad y=\eta+s\sin\alpha$$

α étant une constante, s l'arc de courbe et ξ, η des fonctions de t; ce qui n'offre aucune difficulté.

8. On résoudra de la même façon d'autres problèmes analogues aux précédents.

Cherchons, par exemple, en supposant que la force extérieure ne dépende que de la position de l'élément, si le mouvement du fil peut être représenté par un glissement le long d'une courbe restant homothétique d'elle-même par rapport à l'origine.

Pour que les deux droites

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = F(\alpha)$$

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = F_1(\alpha)$$

enveloppent des courbes homothétiques par rapport à l'origine, il faut et il suffit que l'on ait

$$F_1(\alpha) = kF(\alpha)$$

k étant le rapport d'homothétie. Nous avons écrit l'équation de la tangente au fil

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = p';$$

quand t varie, p' devra être multiplié par un facteur indépendant de α; p' sera donc de la forme

$$p' = f_1(t) f(\alpha)$$

et p de la forme

$$p = A\theta + \theta_1$$

A étant fonction de α, θ et θ_1 fonctions de t. Alors

$$s = p + p'' = (A + A'')\theta + \theta_1$$

$$\rho = p' + p''' = (A' + A''')\theta,$$

$$x = \theta(A' \sin \alpha + A'' \cos \alpha)$$

$$y = \theta(- A' \cos \alpha + A'' \sin \alpha);$$

et l'équation du mouvement devient, en faisant m constant

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\{[(A + A'')\theta' + \theta_1']^2 - \theta(A' + A''')(\Psi + A'\theta'')\}$$
$$+ \theta(A' + A''')(\Phi + A\theta'' + \theta_1'') = 0.$$

Les quantités Φ et Ψ sont supposées fonctions de x, y, α:

$$\Phi = \Phi(x, y, \alpha) = \Phi[\theta(A' \sin\alpha + A'' \cos\alpha), \theta(-A' \cos\alpha + A'' \sin\alpha), \alpha]$$
$$\Psi = \Psi(x, y, \alpha) = \Psi[\theta(A' \sin\alpha + A'' \cos\alpha), \theta(-A' \cos\alpha + A'' \sin\alpha), \alpha].$$

Telle sera l'équation qu'il faudra vérifier par une fonction A de α et des fonctions θ et θ_1 de t. Il pourra se faire qu'il n'y ait d'autre solution que celle qui consiste à supposer θ constant: on retombe alors sur le problème de M. LÉAUTÉ (N° 6). Un cas particulier digne d'être signalé est celui où Φ et Ψ *seraient homogènes en x et y*; alors une certaine puissance de θ se mettrait en facteur devant Φ et Ψ, et l'équation à vérifier rentrerait dans le type (12).

Nous nous bornerons à traiter le cas où il n'y a pas de forces extérieures: $\Phi = \Psi = 0$. L'équation peut alors s'écrire

$$(20) \qquad 2\theta'^2(A + A'')(A' + A''') + (\theta\theta_1'' + 2\theta'\theta_1')(A' + A''')$$
$$+ \theta\theta''[(A' + A''')(A - A'') - (A'' + A^{\text{IV}})A'] = 0,$$

relation du type (12) où on ferait $n = 3$ et

$$T_1 = \theta'^2, \qquad T_2 = \theta\theta_1'' + 2\theta'\theta_1', \qquad T_3 = \theta\theta''$$
$$A_1 = 2(A + A'')(A' + A'''), \qquad A_2 = A' + A''',$$
$$A_3 = (A' + A''')(A - A'') - (A'' + A^{\text{IV}})A'.$$

Les quantités T_1, T_2, T_3 ne peuvent pas être linéairement indépendantes, car A_1, A_2, A_3 devraient être nulles ce qui entraînerait

$$A' + A''' = 0,$$

et la valeur correspondante de A ne définirait pas une courbe mais un point.

De même les quantités A_1, A_2, A_3 ne peuvent pas être linéairement indépendantes, car T_1, T_2, T_3 devraient être nulles, ce qui entrainerait

$$\theta' = 0, \qquad \theta = \text{const.}$$

et on retomberait sur le problème de M. LÉAUTÉ (N° 6).

Supposons que les quantités T_1, T_2, T_3 soient liées par une relation linéaire à coefficients constants:

$$k_1\theta'^2 + k_2(\theta\theta_1'' + 2\theta'\theta_1') + k_3\theta\theta'' = 0,$$

alors on aurait

$$\frac{2(A + A'')(A' + A''')}{k_1} = \frac{A' + A'''}{k_2} = \frac{(A' + A''')(A - A'') - (A'' + A^{\text{iv}})A'}{k_3};$$

les deux premiers rapports fournissent une relation qui exige $A' + A''' = 0$, ou $A + A'' = \frac{k_1}{2k_2}$ c'est à dire aussi $A' + A''' = 0$: cette solution avec l'hypothèse qui lui a donné naissance, doit donc être rejetée.

Il ne reste donc plus qu'une manière de vérifier l'équation (20), c'est de supposer que les quantités A_1, A_2, A_3 sont liées par une relation linéaire à coefficients constants

$$(21) \qquad \begin{aligned} &2c_1(A + A'')(A' + A''') + c_2(A' + A''') \\ &+ c_3[(A' + A''')(A - A'') - (A'' + A^{\text{iv}})A'] = 0; \end{aligned}$$

alors on aurait

$$(22) \qquad \frac{\theta'^2}{c_1} = \frac{\theta\theta_1'' + 2\theta'\theta_1'}{c_2} = \frac{\theta\theta''}{c_3}.$$

Comme c_3 n'est pas nul, posons

$$\frac{c_1}{c_3} = \frac{c}{2},$$

nous aurons

$$\frac{2\theta'}{\theta} - c\frac{\theta''}{\theta'} = 0,$$

d'où, après deux intégrations bien faciles,

$$(23) \qquad \theta = k(t + t_0)^{\frac{c}{c-2}}$$

en supposant c différent de 2. Dans le cas particulier où $c = 2$, on aurait

$$(24) \qquad \theta = k e^{ht}.$$

Quant à la fonction θ_1, elle est donnée par la relation

$$\theta\theta_1'' + 2\theta'\theta_1' = a\theta\theta''$$

dans laquelle on a posé

$$a = \frac{c_2}{c_3}.$$

On en tire

$$\theta_1' = \frac{a\theta'}{c+1} + \frac{b}{\theta^2},$$

b étant une constante arbitraire, d'où enfin θ_1 par une quadrature immédiate

$$\theta_1 = \frac{a}{c+1}\theta + b\int\frac{dt}{\theta^2}.$$

On déterminera A à l'aide de l'équation

$$(25) \qquad c(A + A'')(A' + A''') + a(A' + A''') + (A' + A''')(A - A'') - (A'' + A^{\text{IV}})A' = 0.$$

En écrivant cette équation

$$c(A + A'')(A' + A''') + a(A' + A''') - [(A' + A''')A'' + (A'' + A^{\text{IV}})A'] + AA' + AA''' = 0,$$

on reconnaît que l'on peut intégrer tous les termes et l'on obtient l'intégrale première

$$(26) \qquad c(A + A'')^2 + 2a(A + A'') - 2(A' + A''')A' + A^2 - A'^2 + 2AA'' = f,$$

f étant une constante arbitraire. La détermination de A est donc ramenée à l'intégration d'une équation du troisième ordre et comme cette équation ne contient pas la variable indépendante, elle peut se ramener au second ordre.

Cas particulier. Supposons la constante a *nulle*. L'équation différentielle qui donne A se réduit alors à l'équation

$$(27)\quad c(A + A'')(A' + A''') + (A' + A''')(A - A'') - (A'' + A^{\text{IV}})A' = 0$$

homogène et du second degré à coefficients constants. Si l'on essaye de vérifier cette équation par une fonction de la forme

$$A = \lambda e^{\varkappa a}$$

où λ et $\varkappa$ sont des constantes, on obtient pour déterminer $\varkappa$ l'équation

$$c\varkappa(1 + \varkappa^2)^2 + \varkappa(1 + \varkappa^2)(1 - \varkappa^2) - \varkappa^3(1 + \varkappa^2) = 0$$

qui, après suppression du facteur $\varkappa(1 + \varkappa^2)$ donne

$$c(1 + \varkappa^2) + 1 - 2\varkappa^2 = 0.$$

Ainsi en supposant

$$c = \frac{2\varkappa^2 - 1}{1 + \varkappa^2}$$

l'on a la solution $A = \lambda e^{\varkappa a}$. La valeur (23) trouvée pour θ devient

$$\theta = k(t + t_0)^{\frac{1-2\varkappa^2}{3}};$$

et celle de θ_1

$$\theta_1 = b\int\frac{dt}{\theta^2} = \frac{3bk^{-2}}{4\varkappa^2 + 1}(t + t_0)^{\frac{4\varkappa^2+1}{3}}.$$

Donc enfin

$$p = A\theta + \theta_1 = \mu e^{\varkappa a}(t + t_0)^{\frac{1-2\varkappa^2}{3}} + \nu(t + t_0)^{\frac{4\varkappa^2+1}{3}}$$

μ et ν désignant des constantes arbitraires.

Pour voir quelle est la forme de la courbe à l'instant t, calculons les coordonnées x et y par les formules

$$x = p'\sin\alpha + p''\cos\alpha, \qquad y = -p'\cos\alpha + p''\sin\alpha,$$

nous aurons

$$x = \mu\varkappa e^{\varkappa a}(t + t_0)^{\frac{1-2\varkappa^2}{3}}(\sin\alpha + \varkappa\cos\alpha)$$

$$y = \mu\varkappa e^{\varkappa a}(t + t_0)^{\frac{1-2\varkappa^2}{3}}(-\cos\alpha + \varkappa\sin\alpha),$$

ou, en coordonnées polaires, en appelant R le rayon vecteur et θ l'angle polaire et posant $\frac{1}{x} = \operatorname{tg} \alpha_0$

$$R = \mu x \sqrt{1 + x^2} e^{x\alpha} (t + t_0)^{\frac{1-2x^2}{3}}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\cos \alpha + x \sin \alpha}{\sin \alpha + x \cos \alpha} = \operatorname{tg} (\alpha - \alpha_0),$$

d'où

$$\alpha = \alpha_0 + \theta$$

et enfin

$$R = \mu x \sqrt{1 + x^2} e^{x(\theta + \alpha_0)} (t + t_0)^{\frac{1-2x^2}{3}},$$

équation d'une *spirale logarithmique*. En écrivant

$$R = \mu x \sqrt{1 + x^2} e^{x\left[\theta + \alpha_0 + \frac{1-2x^2}{3x} \log (t + t_0)\right]},$$

on voit que, quand t varie, cette spirale tourne autour de l'origine avec une vitesse angulaire ω donnée par la formule

$$\omega = \frac{1 - 2x^2}{3x} \cdot \frac{d}{dt} \log (t + t_0) = \frac{1 - 2x^2}{3x} \cdot \frac{1}{t + t_0}.$$

En même temps que cette spirale tourne, le fil glisse sur la spirale.

La tension T est donnée par la formule

$$T = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p''}{\partial t}\right)^2 - (p' + p''') \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2};$$

en y remplaçant p par la valeur trouvée

$$p = e^{x\alpha} \theta + \theta_1 = \mu e^{x\alpha} (t + t_0)^{\frac{1-2x^2}{3}} + \nu (t + t_0)^{\frac{4x^2+1}{3}},$$

on a

$$T = [(1 + x^2) e^{x\alpha} \theta' + \theta_1']^2 - x^2 (1 + x^2) e^{2x\alpha} \theta \theta'',$$

ou, en réduisant à l'aide de la relation

$$\theta \theta'' = \frac{2(1 + x^2)}{2x^2 - 1} \theta'^2,$$

$$T = \frac{(1 + x^2)^2}{(1 - 2x^2)} e^{2x\alpha} \theta'^2 + 2(1 + x^2) e^{x\alpha} \theta' \theta_1' + \theta_1'^2.$$

Remarque I. Lorsque x est nul c'est à dire c égal à -1, l'équation qui donne A admet la solution

$$A = \alpha,$$

et la valeur trouvée pour p devient

$$p = (\mu\alpha + \nu)(t + t_0)^{\frac{1}{3}}.$$

Le fil est alors disposé suivant un arc de cercle de centre O et de rayon variable

$$R = \mu(t + t_0)^{\frac{1}{3}}.$$

Cette expression de p, pour le cas où $x = 0$, s'obtient facilement comme limite de celle qui a été trouvée dans la supposition $x \gtrless 0$.

Remarque II. Pour obtenir la solution que nous venons d'étudier, nous avons posé

$$c = \frac{2x^2 - 1}{1 + x^2}, \qquad x^2 = \frac{1 + c}{2 - c};$$

cette solution n'est admissible que si c est compris entre -1 et 2; car si c était en dehors de ces limites x deviendrait imaginaire ainsi que la valeur $\lambda e^{x\alpha}$ trouvée pour A: les expressions trouvées pour θ et θ_1 conviendraient encore, car elles ne dépendent que de x^2.

Par exemple, si $c = -2$, la valeur de x est $\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}$: dans ce cas, l'équation (26) dans laquelle on pose

$$A^2 + A'^2 = u$$

se transforme en la suivante

$$u'' + u = -f$$

qui donne immédiatement

$$u = 2G\cos\alpha + 2H\sin\alpha - f$$

G et H désignant des constantes. La fonction A est alors donnée par l'équation

$$A^2 + A'^2 = 2G\cos\alpha + 2H\sin\alpha - f; \tag{28}$$

d'ailleurs les valeurs de θ et θ_1 deviennent, puisque

$$x^2 = -\frac{1}{4}, \qquad c = -2,$$

$$\theta = k(t + t_0)^{\frac{1}{2}}, \qquad \theta_1 = b\int\frac{dt}{\theta^2} = \frac{b}{k^2}\log(t + t_0);$$

d'où, pour p une valeur de la forme

$$p = kA(t + t_0)^{\frac{1}{2}} + h\log(t + t_0),$$

A étant donnée par l'équation (28). Pour des déterminations convenables de G, H, f cette équation (28) admet une intégrale de la forme

$$A = L\cos\frac{\alpha}{2} + M\sin\frac{\alpha}{2}$$

L et M désignant des constantes.

Les mêmes méthodes permettraient de trouver les mouvements du fil qui consistent en un glissement du fil le long d'une courbe de forme invariable animée d'un mouvement de rotation autour d'un point fixe du plan. Mais nous ne nous arrêtons pas à cette question et nous passons à l'étude des oscillations infiniment petites.

III.

Oscillations infiniment petites autour d'une position d'équilibre stable.

9. Supposons que l'on ait vérifié les équations d'équilibre (11) en y mettant pour p une fonction p_1 de α et pour T une fonction T_1 du même angle: nous appellerons ρ_1 le rayon de courbure de la figure d'équilibre exprimé en fonction de α, et s_1 l'arc de courbe exprimé en fonction de α, de sorte que

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{d\alpha};$$

enfin la densité m qui est une fonction donnée de l'arc, sera dans l'équi-

libre une fonction de α que nous désignerons par m_1. Si l'on écarte le fil très peu de cette position d'équilibre supposée stable, et si l'on imprime à ses points des vitesses très petites, le mouvement du fil consistera en de petites oscillations autour de la figure d'équilibre. Dans ce mouvement qui est défini par les équations (7), p conserve une valeur voisine de p_1 et T une valeur voisine de T_1, de sorte qu'on pourra poser

$$p = p_1 + \varepsilon, \qquad T = T_1 + W,$$

ε et W étant des fonctions de α et t qui, ainsi que leurs dérivées, conservent des valeurs très petites pendant toute la durée du mouvement. En substituant ces valeurs de p et T dans les équations du mouvement et ordonnant suivant les puissances croissantes de ε, W et de leurs dérivées, on aura d'abord une partie principale qui sera nulle en vertu des équations d'équilibre, puis, en négligeant les termes d'un ordre supérieur au premier par rapport aux fonctions ε, W et à leurs dérivées, on aura deux équations linéaires donnant ε et W en fonction de α et t. Si l'on substituait la valeur $p = p_1 + \varepsilon$ dans l'équation (8), on aurait, par cette même méthode, une équation linéaire du quatrième ordre donnant ε en fonction de α et t.

Il sera facile de faire l'application de cette méthode au cas où les forces Φ et Ψ dépendent seulement de α. Mais, dans l'hypothèse actuelle, (Φ et Ψ ne dépendant que de α), on arrivera à des équations plus commodes en partant des équations du mouvement sous la forme (10). Affectons de l'indice 1 les valeurs des quantités $\mathfrak{T}$, s, ρ, m dans la position d'équilibre, toutes ces quantités étant supposées exprimées en fonction de α; et désignons par $\mathfrak{T}_1'$, s_1', ρ_1', m_1' les dérivées de ces quantités par rapport à la variable α dont elles dépendent uniquement, de sorte que $s_1' = \rho_1$. Les équations d'équilibre seront, d'après (10)

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{T}_1\left[\frac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}}\frac{\partial^2\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha^2} = -\Psi' + \Phi' \\ &\qquad\qquad \frac{2}{\sqrt{m_1\rho_1}}\frac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha} = -\Psi'' - \Phi. \end{aligned} \right.$$

Dans le mouvement oscillatoire, les valeurs de $\mathfrak{T}$, s, ρ, m diffèrent peu de $\mathfrak{T}_1$, s_1, ρ_1, m_1, et l'on peut poser

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + V, \qquad s = s_1 + \sigma, \qquad \rho = \rho_1 + \sigma',$$

$$m = m_1 + \frac{m_1'}{\rho_1}\sigma,$$

cette dernière formule résultant de ce que l'on a

$$m = f(s) = f(s_1 + \sigma) = m_1 + \sigma\frac{dm_1}{ds_1};$$

on aura donc

$$m\rho = m_1\rho_1 + m_1\sigma' + \sigma m_1' = m_1\rho_1 + (\sigma m_1)',$$

$(\sigma m_1)'$ désignant la dérivée du produit σm_1 par rapport à α; par conséquent

$$\frac{1}{\sqrt{m\rho}} = \frac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}}\left[1 + \frac{(\sigma m_1)'}{m_1\rho_1}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}} - \frac{1}{2}\frac{(\sigma m_1)'}{(m_1\rho_1)^{\frac{3}{2}}}.$$

En faisant les substitutions précédentes dans les équations du mouvement (10) et tenant compte des équations d'équilibre (29), on obtient les deux équations suivantes

$$(30)\quad \begin{cases} V\left(R_1 + \dfrac{\partial^2 R_1}{\partial\alpha^2}\right) - \dfrac{1}{2}\mathfrak{T}_1\left(R_1^3\tau' + \dfrac{\partial^2(R_1^3\tau')}{\partial\alpha^2}\right) - R_1\dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} + \dfrac{1}{2}R_1^3\tau'\dfrac{\partial^2\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha^2} = 0 \\ 2R_1\dfrac{\partial V}{\partial\alpha} - R_1^3\tau'\dfrac{\partial\mathfrak{T}_1}{\partial\alpha} = -\dfrac{1}{m_1}\dfrac{\partial^2\tau}{\partial t^2}, \end{cases}$$

dans lesquelles on a posé pour simplifier

$$\frac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}} = R_1, \qquad \sigma m_1 = \tau, \qquad \tau' = \frac{\partial\tau}{\partial\alpha}.$$

Dans ces équations R_1, $\mathfrak{T}_1$ et m_1 sont des fonctions connues de α: l'intégration de ces équations donnera V et τ en fonction de α et t. Ayant trouvé τ en fonction de α et t, on aura $\sigma = \frac{\tau}{m_1}$ et, par suite, la formule

$$s = s_1 + \sigma$$

donnera l'expression de l'arc du fil en fonction de α et t, c'est à dire l'équation intrinsèque de la courbe suivant laquelle est disposé le fil au

temps t. Les coordonnées d'un point du fil seront données en α et t par les quadratures

$$x = \int ds \cos\alpha = \int ds_1 \cos\alpha + \int d\sigma \cos\alpha = x_1 + \xi$$
$$y = \int ds \sin\alpha = \int ds_1 \sin\alpha + \int d\sigma \sin\alpha = y_1 + \eta,$$

x_1 et y_1 étant les coordonnées d'un point de la figure d'équilibre exprimées en fonction de α, et ξ et η les différences très petites qu'il y a entre les coordonnées de la position qu'occupe à l'instant t le point du fil où la tangente fait avec l'axe Ox un angle α et les coordonnées de la position qu'occupe dans l'équilibre le point où la tangente fait avec l'axe Ox le même angle. En faisant les quadratures qui donnent ξ et η

$$\xi = \int d\sigma \cos\alpha, \qquad \eta = \int d\sigma \sin\alpha$$

il faudra ajouter aux seconds membres des fonctions arbitraires de t.

Comme on a en général

$$s = p + p'',$$

on aura

$$s_1 + \sigma = p_1 + p_1'' + \varepsilon + \varepsilon'', \qquad \sigma = \varepsilon + \varepsilon'',$$

relation qui donnera ε quand on connaîtra σ en α et t.

10. *Exemple.* Supposons que la seule force extérieure soit la pesanteur: alors

$$\Phi = -g \sin\alpha, \qquad \Psi = -g \cos\alpha$$
$$\Psi' + \Phi = 0, \qquad \Psi - \Phi' = 0.$$

Les équations d'équilibre donnent

$$\mathfrak{T}_1 = K, \qquad R_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1 \rho_1}} = G \cos\alpha,$$

K et G désignant des constantes. Puis les équations (30) du mouvement oscillatoire deviennent

$$\frac{KG^2}{2}\left[\tau' \cos^3\alpha + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(\tau' \cos^3\alpha)\right] + \cos\alpha \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} = 0$$

$$2G \cos\alpha \frac{\partial V}{\partial\alpha} = -\frac{1}{m_1}\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}.$$

Si l'on effectue la différentiation $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(\tau'\cos^3\alpha)$ indiquée dans la première équation et si l'on divise tous les termes par $\cos\alpha$, on peut écrire cette équation

$$\frac{KG^2}{2}(\tau'''\cos^2\alpha - 3\tau''\sin 2\alpha - 4\tau'\cos 2\alpha + 2\tau') + \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} = 0.$$

Cette équation est immédiatement intégrable et donne

$$(31)\qquad \frac{KG^2}{2}(\tau''\cos^2\alpha - 2\tau'\sin 2\alpha + 2\tau) + \frac{\partial V}{\partial\alpha} = \frac{G}{2}F(t),$$

$F(t)$ désignant une fonction arbitraire de t. La seconde équation s'écrit, en remplaçant $\frac{1}{m_1}$ par sa valeur $G^2\rho_1\cos^2\alpha$,

$$(32)\qquad \frac{\partial V}{\partial\alpha} = -\frac{G\rho_1\cos\alpha}{2}\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}.$$

On a ainsi deux équations donnant V et τ. L'élimination de $\frac{\partial V}{\partial\alpha}$ donne pour déterminer τ l'équation du second ordre

$$(33)\qquad KG(\tau''\cos^2\alpha - 2\tau'\sin 2\alpha + 2\tau) - \rho_1\cos\alpha\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} = F(t).$$

Connaissant τ, on a V par une quadrature. La tension T est liée à $\mathfrak{T}$ par la relation

$$\mathfrak{T}\sqrt{m\rho} = T:$$

si l'on appelle, comme plus haut, T_1 la tension dans l'équilibre et $T_1 + W$ la tension pendant les oscillations, on aura

$$\mathfrak{T}_1 + V = \frac{T_1 + W}{\sqrt{m_1\rho_1 + \tau'}}, \qquad \mathfrak{T}_1 = \frac{T_1}{\sqrt{m_1\rho_1}},$$

d'où, en développant et remplaçant $\frac{1}{\sqrt{m_1\rho_1}}$ par sa valeur $G\cos\alpha$,

$$(34)\qquad V = G\cos\alpha . W - \frac{KG^2}{2}\cos^2\alpha . \tau',$$

équation qui donnera W.

Dans l'ouvrage intitulé: *Advanced rigid Dynamics*, by E. J. Routh (London, Macmillan and Co., 1884) la question des oscillations planes d'un fil homogène pesant autour d'une position d'équilibre se trouve traitée par une méthode particulière, conduisant aux résultats suivants (loc. cit. p. 311). M. Routh prend pour variables indépendantes le temps t et l'angle α que fait la tangente en un point P du fil avec l'axe des coordonnées x *dans la position d'équilibre*. Soit φ l'angle que fait la tangente au point P à l'instant t avec la position qu'occupe cette tangente dans l'équilibre, U la variation que subit la tension au point P quand on passe de l'équilibre au mouvement. Les quantités φ et U sont des fonctions de α et t qui restent très petites pendant le mouvement. M. Routh donne pour déterminer ces fonctions les deux équations

$$(35) \qquad \frac{\rho_1}{\cos\alpha}\frac{d^2\varphi}{dt^2} - g\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} = 2\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{U\cos\alpha}{w}\right)$$

$$2g\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{U\cos\alpha}{w}\right)$$

dont la seconde est immédiatement intégrable et donne

$$(36) \qquad \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{U\cos\alpha}{w}\right) = 2g\varphi + C,$$

C désignant une fonction arbitraire de t. Dans ces équations w est une constante et ρ_1 désigne le rayon de courbure de la position d'équilibre exprimé en fonction de α.

Pour comparer ces équations à celles que fournit la méthode générale dans le cas où la seule force extérieure est la pesanteur, cherchons comment les variables que nous avons appelées τ et V sont liées à φ et U. Dans nos équations l'arc s est une fonction de α et t

$$s = s_1 + \sigma = s_1(\alpha) + \sigma(\alpha, t)$$

en mettant les variables en évidence. Dans l'équilibre la longueur de l'arc jusqu'au point P est

$$s = s_1(\alpha)$$

puisque σ est alors nul. Pendant le mouvement l'angle α que fait la

tangente au même point P avec l'axe Ox est $\alpha + \varphi$; on a donc aussi, à l'instant t

$$s = s_1(\alpha + \varphi) + \sigma(\alpha + \varphi , t),$$

d'où, en développant par rapport aux puissances de φ et ne conservant que les termes du premier ordre

$$s = s_1(\alpha) + \rho_1\varphi + \sigma(\alpha , t).$$

En égalant cette expression de s à la précédente, on a

$$\rho_1\varphi + \sigma(\alpha , t) = 0,$$

$$\varphi = -\frac{\sigma}{\rho_1} = -\frac{m_1\sigma}{m_1\rho_1} = -\frac{\tau}{m_1\rho_1}.$$

Mais, dans la position d'équilibre on a

$$m_1\rho_1 = \frac{1}{G^2\cos^2\alpha},$$

donc enfin φ et τ sont liés par la relation

(37) $$\varphi = -G^2\tau\cos^2\alpha.$$

De même en appelant T_1 ou $T_1(\alpha)$ la tension dans l'état d'équilibre en fonction de α, nous avons posé pour le mouvement

$$T = T_1 + W = T_1(\alpha) + W(\alpha , t);$$

donc, au point P où la tangente fait avec Ox un angle $\alpha + \varphi$, on a

$$T = T_1(\alpha + \varphi) + W(\alpha + \varphi , t) = T_1(\alpha) + \varphi\frac{dT_1}{d\alpha} + W(\alpha , t).$$

Cette valeur de la tension est ce que M. Routh appelle $T_1 + U$; on a donc

$$U = \varphi\frac{dT_1}{d\alpha} + W,$$

ou bien, comme

$$T_1 = \frac{K}{G\cos\alpha}, \qquad \varphi = -G^2\tau\cos^2\alpha,$$

$$U = -KG\tau\sin\alpha + W.$$

Si l'on multiplie cette relation par $G\cos\alpha$ en tenant compte de la relation (34) qui lie W à V, on a

$$GU\cos\alpha = -KG^2\tau\sin\alpha\cos\alpha + \frac{KG^2\tau'\cos^2\alpha}{2} + V$$

ou

$$GU\cos\alpha = V + \frac{KG^2}{2}\frac{d}{d\alpha}(\tau\cos^2\alpha)$$

et enfin, d'après la relation (37),

$$GU\cos\alpha = V - \frac{K}{2}\frac{d\varphi}{d\alpha}. \tag{38}$$

Ces formules (37) et (38) donnent nos variables τ et V en fonction des variables φ et U de M. ROUTH: elles permettent de passer de nos équations à celles de M. ROUTH ou inversement, comme on s'en assure aisément en donnant aux constantes les valeurs correspondantes

$$w = \frac{1}{G^2}, \qquad g = KG.$$

Remarque. Quoique notre variable α ne soit pas la même que celle que M. ROUTH désigne par la même lettre, les équations obtenues avec les deux systèmes de variables sont identiques parce que ce sont des *équations approchées.* En effet appelons α l'angle que fait la tangente au fil en un point P avec Ox dans la position d'équilibre, et α' ce que devient cet angle au temps t: on aura

$$\alpha' = \alpha + \varphi.$$

Dans les équations de M. ROUTH les variables indépendantes sont α et t, dans les nôtres α' et t. Si donc F est une fonction de α' et t on pourra l'exprimer en α et t en y remplaçant α' par sa valeur $\alpha + \varphi$ et l'on aura, si l'on désigne par la lettre ∂ les dérivées partielles dans le système de variable α, t et par d les dérivées partielles dans le système des variables α', t

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{dF}{d\alpha'}\left(1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right), \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dF}{dt} + \frac{dF}{d\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Mais si F est une fonction qui reste très petite pendant toute la durée

du mouvement, comme les fonctions appelées U, V, W, σ, τ, φ, on aura en négligeant les termes du second ordre

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{dF}{d\alpha'}, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dF}{dt}$$

comme si les variables α et α' étaient les mêmes. Aussi, dans tout ce qui suit, nous continuerons à désigner ces deux variables par la même lettre α en les confondant l'une avec l'autre.

11. *Etude de l'équation différentielle.* En faisant comme plus haut

$$\varphi = - G^2 \tau \cos^2 \alpha$$

et désignant par $f(t)$ une fonction arbitraire de t, on ramène l'équation (33) à la forme donnée par M. Routh

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + 4\varphi - \frac{\rho_1}{g \cos \alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = f(t), \tag{40}$$

ρ_1 étant une fonction connue de α.

Tout d'abord, si φ est une solution de cette équation pour une certaine détermination de la fonction $f(t)$, la fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ est une solution de l'équation obtenue en remplaçant $f(t)$ par la dérivée $\frac{df}{dt}$; de même la fonction $\int \varphi \, dt$ est une solution de l'équation obtenue en remplaçant $f(t)$ par l'intégrale $\int f(t) dt$, à condition que la fonction arbitraire de α qui figure dans l'intégrale $\int \varphi \, dt$ soit convenablement déterminée. Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions correspondant aux déterminations $f_1(t)$ et $f_2(t)$ de la fonction arbitraire $f(t)$, la fonction

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$$

sera une solution correspondant à la détermination $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ de la fonction f, λ_1 et λ_2 désignant des constantes quelconques. La combinaison de ces deux propriétés permet de déduire de chaque détermination de $f(t)$ pour laquelle on connaît une solution de l'équation, une infinité d'autres déterminations de cette même fonction avec des solutions correspondantes.

Cherchons si l'équation (40) peut admettre une intégrale de la forme

$$\varphi = A\theta$$

A désignant une fonction de α et θ une fonction de t dont les dérivées respectives seront appelées A', A'', θ', θ''. Nous aurons en substituant

$$\theta(A'' + 4A) - \frac{\rho_1}{g \cos \alpha} A\theta'' - f(t) = 0,$$

équation qui rentre dans la forme (12). Suivant la méthode employée au sujet des équations de cette forme dans le N° **5**, deux cas sont à distinguer

1°) Supposons qu'il y ait une relation linéaire à coefficients constants entre les fonctions de α

(41) $$A'' + 4A\,, \qquad \rho_1 \frac{A}{g \cos \alpha}, \qquad 1,$$

relation de la forme

$$k_1(A'' + 4A) + k_2\rho_1 \frac{A}{g \cos \alpha} + k_3 = 0,$$

l'on devra avoir

$$\frac{\theta}{k_1} = -\frac{\theta''}{k_2} = -\frac{f(t)}{k_3};$$

d'où en écartant le cas de $k_3 = 0$ c'est à dire de $f(t) = 0$, cas que nous examinerons à part,

$$f(t) = \lambda \cos xt + \mu \sin xt, \qquad \theta = -\frac{k_1}{k_3}(\lambda \cos xt + \mu \sin xt)$$

où x est la quantité

$$x = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

et λ, μ des constantes. Comme l'on peut, sans changer la solution $\varphi = A\theta$ remplacer A par $-A\frac{k_1}{k_3}$ et θ par $-\theta\frac{k_3}{k_1}$, on voit que, si $f(t)$ est de la forme $\lambda \cos xt + \mu \sin xt$ on aura une solution en prenant pour θ la quan-

tité $\lambda \cos xt + \mu \sin xt$ et pour A une intégrale de l'équation linéaire avec second membre

(42) $$A'' + 4A + x^2 \frac{\rho_1}{g \cos \alpha} A = 1.$$

On en conclut une intégrale de l'équation aux dérivées partielles pour le cas plus général où $f(t)$ serait de la forme

$$f(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \cos x_i t + \mu_i \sin x_i t,$$

λ_i, μ_i, x_i étant des constantes. Cette solution sera

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} A_i (\lambda_i \cos x_i t + \mu_i \sin x_i t)$$

où A_i est une intégrale de l'équation (42) dans laquelle x possède la valeur x_i.

2°) Supposons qu'il y ait, entre les fonctions (41), deux relations linéaires homogènes à coefficients constants

$$A'' + 4A = k_1, \qquad \frac{\rho_1 A}{g \cos \alpha} = k_2.$$

Alors, en intégrant la première on a

$$4A = k_1 + \lambda \cos 2\alpha + \mu \sin 2\alpha$$

(43) $$\rho_1 = \frac{4 g k_2 \cos \alpha}{k_1 + \lambda \cos 2\alpha + \mu \sin 2\alpha}.$$

Ce cas ne peut donc se présenter que si la densité du fil suit une loi d'après laquelle l'équation intrinsèque de la figure d'équilibre soit de la forme (43); c'est ce qui arrive par exemple si la figure d'équilibre est une cycloïde ($\lambda = \mu = 0$). Les fonctions θ, θ'' et $f(t)$ sont, dans l'hypothèse actuelle, liées par la relation unique

$$k_1 \theta - k_2 \theta'' - f(t) = 0$$

qui donne immédiatement θ quand on a choisi $f(t)$, car cette relation est, par rapport à θ, une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec second membre.

Cas particuliers. Supposons que la figure d'équilibre du fil soit symétrique par rapport à une verticale et que les deux points d'attache du fil soient à la même hauteur: alors, si les conditions initiales sont symétriques par rapport à cette même verticale, la symétrie persistera pendant toute la durée du mouvement. Dans ce cas la fonction arbitraire $f(t)$ est nulle comme le montre M. ROUTH. En effet φ est alors une fonction impaire de α, ρ_1 une fonction paire de α: ce qui exige $f(t) = 0$. L'équation devient donc dans ce cas

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + 4\varphi - \frac{\rho_1}{g\cos\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{44}$$

Si l'on pose, comme ci-dessus

$$\varphi = A\theta$$

A dépendant de α seul et θ de t seul, on aura nécessairement

$$A'' + A\left(4 - \frac{k\rho_1}{g\cos\alpha}\right) = 0 \tag{45}$$

$$\theta'' - k\theta = 0$$

k désignant une constante arbitraire. Soit

$$A = \tilde{\omega}(\alpha, k)$$

une intégrale impaire en α de l'équation (45), l'équation aux dérivées partielles (44) admettra l'intégrale impaire en α

$$\varphi = \int_{k_0}^{k_1} \tilde{\omega}(\alpha, k)\cos t\sqrt{-k}\, f_1(k)\,dk + \int_{k_0}^{k_1} \tilde{\omega}(\alpha, k)\sin t\sqrt{-k}\, f_2(k)\,dk$$

avec deux fonctions arbitraires f_1 et f_2.

Parmi les cas où l'équation (45) se ramène à des formes connues, les plus simples sont les suivants

1) $\rho_1 = a\cos\alpha$. La figure d'équilibre est une cycloïde; ce cas se trouve examiné dans l'ouvrage de M. ROUTH (loc. cit. p. 313).

2) $\frac{\rho_1}{g} = \varkappa^2 \operatorname{sn}^2\alpha\cos\alpha + h\cos\alpha$, $\varkappa$ étant le module de la fonction elliptique $\operatorname{sn}\alpha$ et k ayant la valeur $-n(n+1)$, n désignant un entier quelconque. L'équation (45) est alors une équation de LAMÉ

$$A'' = [-n(n+1)\varkappa^2\operatorname{sn}^2\alpha + kh - 4]A \tag{46}$$

et θ possède la valeur

$$\theta = \lambda_n \cos t\sqrt{n(n+1)} + \mu_n \sin t\sqrt{n(n+1)}.$$

Soit d'après la méthode de M. HERMITE $f_n(\alpha)$ une solution de l'équation de LAMÉ (46); la fonction $f_n(-\alpha)$ sera une autre solution et

$$f_n(\alpha) - f_n(-\alpha)$$

sera une solution *impaire* de l'équation. Alors la série

$$\varphi = \sum_{n=0}^{n=\infty} [\lambda_n \cos t\sqrt{n(n+1)} + \mu_n \sin t\sqrt{n(n+1)}][f_n(\alpha) - f_n(-\alpha)]$$

définit une *fonction impaire* de α satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles: pour $t = 0$ cette fonction et sa dérivée par rapport à t se réduisent aux valeurs

$$(\varphi)_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda_n [f_n(\alpha) - f_n(-\alpha)],$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mu_n \sqrt{n(n+1)}[f_n(\alpha) - f_n(-\alpha)].$$

Comme, d'après les conditions initiales $(\varphi)_0$ et $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0$ sont donnés en fonction de α, on connaîtra les coefficients λ_n et μ_n de ces développements et, par suite, l'intégrale φ.

Soient

$$(\varphi)_0 = F(\alpha), \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_0 = F_1(\alpha)$$

ces fonctions seront impaires en α à cause de la symétrie supposée. On est donc ramené à ce problème d'analyse: *développer une fonction impaire de α donnée entre les limites $-\alpha_0$, $+\alpha_0$ en série de la forme*

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda_n [f_n(\alpha) - f_n(-\alpha)]$$

convergente entre ces limites.

3°) $\rho_1 = \frac{B + C\sin\alpha + D\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$, B, C, D étant des constantes; dans ce cas, l'équation (45) prend la forme

$$A'' + \frac{a + b\sin\alpha + c\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}A = 0,$$

a, b, c étant de nouvelles constantes; et cette dernière équation se réduit facilement à celle de la série hypergéométrique de GAUSS. En effet, en faisant d'abord un changement de fonction et posant

$$A = \cos^\lambda\alpha \,.\, \mathrm{tg}^\mu\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right).\, Z,$$

Z étant la nouvelle fonction inconnue, on pourra déterminer les exposants λ et μ de façon que, dans l'équation en Z, le coefficient de Z soit égal à celui de Z'' multiplié par une constante ν; il suffira pour cela de vérifier les trois équations

$$\mu^2 - \lambda = \nu - a, \qquad \mu - 2\lambda\mu = -b, \qquad \lambda^2 = -\nu - c$$

qui déterminent λ, μ et ν. L'élimination de ν et μ conduit, pour calculer λ, à une équation du quatrième degré qu'on abaisse au second degré en prenant pour inconnue $\lambda^2 - \lambda$. Les constantes λ, μ et ν étant ainsi déterminées, l'équation qui donne Z prend la forme

$$Z'' + 2\frac{\mu - \lambda\sin\alpha}{\cos\alpha}Z' + \nu Z = 0$$

et se réduit à l'équation de la série hypergéométrique si l'on fait le changement de variable indépendante

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = u.$$

SUR UNE MÉTHODE POUR OBTENIR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE DE QUELQUES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

M. LERCH

À PRAGUE-VINOHRADY.

Je vais développer une méthode directe et très simple pour obtenir le développement en série trigonométrique de la fonction

$$\frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)},$$

où

$$\vartheta_0(u) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nu\pi, \qquad q = e^{\tau\pi i}.$$

Ladite fonction admettant la période 1 et restant finie à l'intérieur de la bande indéfinie limitée par les deux parallèles à l'axe réel menées par les points $u = \pm\frac{\tau}{2}$, pourra s'exprimer par une série de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Phi_n(x)e^{2nu\pi i},$$

où l'on a posé

$$(1) \qquad \Phi_n(x) = \int_0^1 \frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)}e^{-2nu\pi i}du.$$

Je considère d'abord l'intégrale

$$(2) \qquad \Phi_0(x) = \int_0^1 \frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)}\,du$$

qui définit évidemment une fonction entière transcendante de la variable x.

D'après la formule

$$\vartheta_0(x+m+n\tau) = (-1)^n e^{-n\pi i(2x+n\tau)} \vartheta_0(x),$$

dans laquelle m, n représentent des nombres entiers, nous aurons

$$(3) \qquad \Phi_0(x+m+n\tau) = (-1)^n e^{-n\pi i(2x+n\tau)} \Phi_n(x).$$

Or l'intégrale au second membre de la formule (1) s'évanouissant pour $x = 0$ toutes les fois que n est différent de zéro, il résulte de l'équation (3) que la fonction $\Phi_0(x)$ s'annule en posant

$$x = m + n\tau, \qquad \begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \end{pmatrix}$$

de sorte qu'elle peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \Phi_0(x) = \frac{\vartheta_1(x)}{\sin \pi x} G(x),$$

où $G(x)$ désigne une fonction entière transcendante qui peut se réduire, bien entendu, à une constante, et où nous avons posé comme il est d'usage

$$\vartheta_1(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2} \sin(2n+1)u\pi.$$

L'équation (4) combinée avec la formule (3) et avec l'équation connue

$$\vartheta_1(x+m+n\tau) = (-1)^{m+n} e^{-n\pi i(2x+n\tau)} \vartheta_1(x),$$

nous donne la suivante

$$(5) \qquad \frac{G(x+m+n\tau)}{\sin \pi(x+m+n\tau)} = \frac{(-1)^m}{\vartheta_1(x)} \Phi_n(x),$$

dont nous allons conclure que $G(x)$ est une constante.

Supposons à cet effet que x se trouve représenté par un point quelconque appartenant au *parallélogramme des périodes* dont les sommets ont

pour affixes les quatre quantités $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{\tau}{2}$, de sorte que la fonction $\vartheta_1(x)$ ne s'annule qu'au point $x = 0$. En supposant $n \gtrless 0$ ce point sera de même un zéro de la fonction $\Phi_n(x)$, et on aura d'après un théorème bien connu de M. DARBOUX[1], la formule

$$(6) \qquad \Phi_n(x) = \lambda x \Phi'_n(x'),$$

où $|\lambda| < 1$, et où x' appartient aussi au parallélogramme des périodes. Comme on a

$$\Phi'_n(x') = \int_0^1 e^{-2nu\pi i} \frac{\vartheta'_n(x'+u)}{\vartheta_0(u)} du,$$

il existe une quantité finie M telle qu'on ait, pour toutes les valeurs de x en question et pour toutes les valeurs de n différentes de zéro, les deux inégalités

$$|\Phi'_n(x')| < M^{\frac{1}{2}},$$
$$\left|\frac{x}{\vartheta_1(x)}\right| < M^{\frac{1}{2}}.$$

dont on conclut, au moyen de la formule (6), l'inégalité suivante

$$(7) \qquad \left|\frac{\Phi_n(x)}{\vartheta_1(x)}\right| < M.$$

Or chaque quantité z, dont la partie imaginaire se trouve en dehors d'un certain intervalle fini $(-\beta i \ldots \beta i)$, pouvant se mettre sous la forme $x + m + n\tau$, où $n \gtrless 0$, on obtient des formules (5) et (7) l'inégalité

$$(8) \qquad |G(z)| < M|\sin \pi z|$$

qui est satisfaite pour chacune des dites valeurs de z. Ensuite, la fonction $\Phi_0(z)$ admettant la période 1, on aura de même $G(z+1) = G(z)$, et par conséquent on pourra exprimer cette dernière fonction par une série toujours convergente de la forme

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi^{2n}, \qquad \xi = e^{z\pi i}.$$

[1] Ce théorème peut être ici remplacé par un semblable dû à M. MANSION.

Cela étant l'inégalité (8) se décompose en les deux suivantes

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi^{2n+1}\right| < M \quad \text{pour} \quad |\xi| < e^{-\delta},$$

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi^{2n-1}\right| < M \quad \text{pour} \quad |\xi| > e^{\delta},$$

et celles-ci entraînent les suivantes

$$|A_{-n}| < M|\xi|^{2n-1} \qquad \text{pour} \quad |\xi| < e^{-\delta},$$

et

$$|A_n| < M|\xi|^{-2n+1} \qquad \text{pour} \quad |\xi| > e^{\delta},$$

qui exigent que l'on ait $A_n = 0$ sauf pour $n = 0$. Il faut donc que l'on ait $G(z) = A_0$ et l'équation (4) deviendra, par conséquent,

(I) $$\Phi_0(x) = \int_0^1 \frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)}\,du = \frac{1}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0}\,\frac{\vartheta_1(x)}{\sin\pi x},$$

puisqu'on obtient sans peine

$$A_0 = \frac{\pi}{\vartheta_1'} = \frac{1}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0}.$$

Ensuite l'équation (5) fait voir que

(II) $$\Phi_n(x) = \frac{1}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0}\,\frac{\vartheta_1(x)}{\sin\pi(x+n\tau)},$$

de sorte qu'on aura enfin

(III) $$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0\,\frac{\vartheta_0(u+x)}{\vartheta_0(u)\vartheta_1(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nu\pi i}}{\sin\pi(x+n\tau)},$$

formule dont on conclut la suivante, après une transformation du second membre,

(III') $$\frac{\vartheta_1'\vartheta_0(u+x)}{\vartheta_0(u)\vartheta_1(x)} = \frac{\pi}{\sin\pi x} + 4\pi\sum q^{mn}\sin\pi(2nu+mx),$$

les indices sommatoires étant $m = 1, 3, 5, \ldots$; $n = 1, 2, 3, \ldots$. En

changeant, dans la formule (III), x en $x + \frac{\tau}{2}$ ou en $x + \frac{1}{2}$ on obtient après des transformations convenables d'autres formules analogues à (III') et c'est de ces développements que M. HERMITE avait tiré quelques formules intéressantes de la théorie des fonctions elliptiques.[1] Je me borne seulement à remarquer que la formule (III') conduit à la suivante

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\vartheta_1' \vartheta_0(u+x)}{\vartheta_0(u)\vartheta_1(x)} dx = 2 \lg(1+\sqrt{2}) + 4\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(q^n) \cos 2nu\pi,$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{1-z^2}{1+z^4} dz = \frac{\sqrt{2}}{4} \lg \frac{(1+ze^{\frac{\pi i}{4}})(1+ze^{-\frac{\pi i}{4}})}{(1-ze^{\frac{\pi i}{4}})(1-ze^{-\frac{\pi i}{4}})}.$$

Ce résultat peut s'exprimer plus simplement par la formule

(IV) $$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\vartheta_1' \vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)\vartheta_1(x)} dx = 2 \lg \Phi(u, q),$$

où l'on a posé

(IV') $$\Phi(u, q) = (1+\sqrt{2}) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^n e^{\frac{\pi i}{4}}}{1-q^n e^{\frac{\pi i}{4}}} \cdot \frac{1+q^n e^{-\frac{\pi i}{4}}}{1-q^n e^{-\frac{\pi i}{4}}} \right)^{\cos 2nu\pi}.$$

---

[1] Ces formules se trouvent dans un mémoire de M. LIPSCHITZ (*Bemerkungen über eine Gattung vielfacher Integrale;* Journal für Mathematik, t. **101**, p. 223) dont la seconde partie est consacrée aux résultats de M. HERMITE.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS ALGÉBRIQUES

PAR

C. GUICHARD
À RENNES.

Soit:

$$\frac{d^n z}{dx^n} + R_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + R_n z = 0 \tag{1}$$

une équation différentielle linéaire et homogène, où les R_i sont des fonctions rationnelles de deux variables x, y liées par une équation algébrique:

$$F(x, y) = 0. \tag{2}$$

Soit $x = a$, $y = b$, un point de ramification d'ordre m de la courbe (2). Supposons que pour $x = a$, $y = b$, $R_1, R_2, \ldots, R_n$ restent finis. Je vais démontrer le théorème suivant:

Si la variable x tourne m fois autour du point a, les n intégrales de l'équation (1) *reprennent leur valeur initiale.*

Je démontrerai ce théorème en supposant $n = 4$. On verra facilement que la démonstration s'étend au cas général. J'écris l'équation (1) sous la forme suivante:

$$(x-a)^4 \frac{d^4 z}{dx^4} + (x-a)^3 . P_1 . \frac{d^3 z}{dx^3} + (x-a)^2 P_2 . \frac{d^2 z}{dx^2} \tag{3}$$
$$+ (x-a) P_3 . \frac{dz}{dx} + P_4 = 0.$$

En vertu de l'hypothèse faite sur les coefficients, P_1, P_2, P_3, P_4 contiennent respectivement en facteur, $x-a$, $(x-a)^2$, $(x-a)^3$, $(x-a)^4$.

Cela posé, je ramène les m portions de plan qui se raccordent au point a à la forme élémentaire par le changement de variable:

$$x-a=\xi^m.$$

L'équation (3) se transforme alors en la suivante:

$$\xi^4\frac{d^4z}{d\xi^4}+Q_1\xi^3\frac{d^3z}{d\xi^3}+Q_2\xi^2\frac{d^2z}{d\xi^2}+Q_3\xi\frac{dz}{d\xi}+Q_4z=0. \tag{4}$$

Pour calculer les coefficients Q je remarque que l'on a:

$$(x-a)\cdot\frac{dF}{dx}=\frac{1}{m}\cdot\xi\frac{dF}{d\xi}. \tag{5}$$

En prenant pour F successivement, z, $(x-a)\frac{dz}{dx}$, ... on aura:

$$(x-a)\frac{dz}{dx}=\frac{1}{m}\cdot\xi\frac{dz}{d\xi},$$

$$(x-a)\frac{d}{dx}\left[(x-a)\frac{dz}{dx}\right]=\frac{1}{m^2}\cdot\xi\cdot\frac{d}{d\xi}\left[\xi\frac{dz}{d\xi}\right],$$

d'où:

$$(x-a)^2\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{1}{m^2}\left[\xi^2\frac{d^2z}{d\xi^2}-(m-1)\xi\frac{dz}{d\xi}\right].$$

Je dis que d'une manière générale on a:

$$(x-a)^q\frac{d^qz}{dx^q}=\frac{1}{m^q}\left[\xi^q\frac{d^qz}{d\xi^q}+a_{q1}\xi^{q-1}\frac{d^{q-1}z}{d\xi^{q-1}}+a_{q2}\xi^{q-2}\frac{d^{q-2}z}{d\xi^{q-2}}+\dots\right]. \tag{6}$$

Il suffit pour cela de démontrer que si cette formule est exacte pour une valeur de q, elle l'est encore pour la valeur suivante.

Appliquons la formule (5) aux deux membres de la relation (6). On aura:

$$(x-a)^{q+1}\frac{d^{q+1}z}{dx^{q+1}}+q(x-a)^q\frac{d^qz}{dx^q}=\frac{1}{m^{q+1}}\left[\xi^{q+1}\frac{d^{q+1}z}{d\xi^{q+1}}+a_{q1}\xi^q\frac{d^qz}{d\xi^q}+\dots\right]$$
$$+\frac{1}{m^{q+1}}\left[q\cdot\xi^q\frac{d^qz}{d\xi^q}+(q-1)a_{q1}\xi^{q-1}\frac{d^{q-1}z}{d\xi^{q-1}}+\dots\right].$$

Cette dernière formule établit l'exactitude de la propriété énoncée. Elle donne pour le calcul des coefficients a les formules de récurrence:

$$a_{q+1,1} = a_{q,1} - (m-1)q,$$
$$a_{q+1,2} = a_{q,2} + \quad - mq + q - 1] a_{q,1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Je n'insiste pas davantage sur ce calcul, car il n'est pas nécessaire pour arriver à notre but de connaître la valeur de ces coefficients.

En portant les valeurs de $(x-a)^q \dfrac{d^q z}{dx^q}$ dans l'équation (3) on aura:

$$Q_1 = a_{41} + mP_1,$$
$$Q_2 = a_{42} + a_{31} mP_1 + m^2 P_2,$$
$$Q_3 = a_{43} + a_{32} mP_1 + a_{21} m^2 P_2 + m^3 P_3,$$
$$Q_4 = m^4 P_4.$$

P_1, P_2, P_3, P_4 deviennent des fonctions de ξ qui contiennent respectivement en facteur, $\xi^m, \xi^{2m}, \xi^{3m}, \xi^{4m}$.

Les fonctions Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sont des fonctions holomorphes de ξ dans le voisinage de $\xi = 0$. Nous poserons:

$$Q_i = \sum_0^\infty A_\mu^i \xi^\mu.$$

Formons maintenant la fonction caractéristique de l'équation (4), qu'on obtient, comme on le sait, en remplaçant dans le premier membre de cette équation z par ξ^r. Nous obtenons:

$$\xi^r F(r) + \xi^{r+1}\varphi_1(r) + \xi^{r+2}\varphi_2(r) + \cdots$$

où:

$$F(r) = r(r-1)(r-1)(r-3) + A_0^1 r(r-1)(r-2)$$
$$+ A_0^2 r(r-1) + A_0^3 r + A_0^4,$$
$$\varphi_k(r) = A_k^1 r(r-1)(r-2) + A_k^2 r(r-1) + A_k^3 r + A_k^4.$$

Je ferai sur les polynômes F et φ les remarques suivantes:

Remarque 1. Les coefficients A_0^1, A_0^2, A_0^3, A_0^4 ont respectivement pour valeur: a_{41}, a_{42}, a_{43}, o; ils ne dépendent pas des coefficients des fonctions P. Il en résulte qu'on ne change pas la valeur de $F(r)$ si l'on suppose que dans l'équation (3) on remplace P_1, P_2, P_3, P_4 respectivement par $x-a$, $(x-a)^2$, $(x-a)^3$, $(x-a)^4$. Dans ces conditions, l'équation caractéristique de (3) aurait pour racines o, 1, 2, 3. Dans l'équation transformée (4) les racines de l'équation caractéristique seront alors o, m, $2m$, $3m$. Ce sont aussi les racines de $F(r)$. D'une manière générale, l'équation:

$$(7) \qquad r(r-1)\ldots(r-q+1)+a_{q1}r(r-1)\ldots(r-q+2)$$
$$+a_{q2}r(r-1)\ldots(r-q+3)+\ldots=0$$

admet pour racines:

$$0, m, 2m, \ldots, (q-1)m,$$

ce qui donnerait une nouvelle méthode pour calculer les coefficients a.

Remarque 2. Les polynômes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}$ sont identiquement nuls. En effet les fonctions Q ne renferment pas de termes dont le degré est 1, 2, ..., $m-1$.

Remarque 3. Les polynômes $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_{2m-1}$ ont pour racines communes:

$$0, m, 2m.$$

En effet si k_i est le coefficient de ξ^{m+i} dans P_1 on a:

$$\varphi_{m+i}=m.k_i[r(r-1)(r-2)+a_{31}r(r-1)+a_{32}r].$$

Remarque 4. On voit de même:

1° que les polynômes $\varphi_{2m}, \varphi_{2m+1}, \ldots, \varphi_{3m-1}$ ont pour racines communes

$$0, m;$$

2° que les polynômes $\varphi_{3m}, \varphi_{3m+1}, \ldots, \varphi_{4m-1}$ ont pour racine commune

$$0.$$

Cela posé, cherchons à intégrer l'équation (4) en prenant pour z une série de la forme:

$$z = \sum_0^{\infty} c_i \xi^i.$$

On aura pour déterminer c_i l'équation:

$$(8) \qquad c_i F(i) + c_{i-1}\varphi_1(i-1) + c_{i-2}\varphi_2(i-2) + \ldots + c_0\varphi_i(0) = 0.$$

Donnons-nous arbitrairement c_0. L'équation (8) donne pour $c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}$ la valeur 0. L'équation qui détermine c_m:

$$c_m F(m) + c_{m-1}\varphi_1(m-1) + \ldots + c_0\varphi_m(0) = 0$$

se réduit à une identité. On pourra prendre c_m arbitrairement. On aura ensuite 0 pour valeur de $c_{m+1}, \ldots, c_{2m-1}$. Puis l'équation qui détermine c_{2m}, se réduit à une identité; c_{2m} pourra être pris arbitrairement. Ensuite on trouvera 0 pour les coefficients $c_{2m+1}, c_{2m+2}, \ldots, c_{3m-1}$. On pourra prendre arbitrairement c_{3m}. A partir de là les équations ne deviendront jamais identiques. Les coefficients $c_{3m+1}, \ldots, c_{4m-1}$ seront encore nuls. Mais après le terme c_{4m}, il pourra y avoir des coefficients dont l'indice n'est pas divisible par m.

On démontre dans la théorie des équations différentielles que la série obtenue est convergente et donne l'intégrale générale. C'est une fonction uniforme de ξ et par suite de x, y près du point de ramification.

ÜBER GEWISSE EBENE CONFIGURATIONEN

VON

J. DE VRIES
in KAMPEN (Holland).

Eine ebene Figur, welche aus p Punkten und g Geraden derart zusammengesetzt ist, dass jeder Punkt mit γ Geraden und jede Gerade mit π Punkten incident ist, heisst bekanntlich eine Configuration; ich bezeichne sie mit dem Symbol (p_γ, g_π) falls γ und π verschieden sind: für $\gamma = \pi$ hat Herr Reye die Bezeichnung p_π eingeführt. [1]

Die Cf. 8_3, 9_3, 10_3 sind von Herrn Kantor,[2] die Cf. 11_3 von Herrn Martinetti[3] eingehend untersucht worden, während Herr Schönflies[4] die regelmässigen Cf. p_3 einer Betrachtung unterworfen hat. In der folgenden Arbeit sind die Eigenschaften von einigen Cf. (p_4, g_3) abgeleitet und gewisse Cf. aufgestellt worden, welche sich diesen ungezwungen anschliessen.[5]

1. Die kleinsten Zahlen, für welche eine Cf. (p_4, g_3) möglich ist, sind $p = 9$, $g = 12$. Werden aus einer $(9_4, 12_3)$ ein Punkt und die

[1] Acta Mathematica, Bd. **1**. Das von mir benutzte Symbol schliesst sich der von Herrn Reye vorgeschlagenen Bezeichnung einer räumlichen Cf. an.

[2] Sitzungsberichte d. Wiener Akademie, Bd. **84**, S. 915 und 1291.

[3] Annali di Matematica, Serie II, Bd. **15**, S. 1.

[4] Göttinger Nachrichten 1887, S. 410 und Math. Annalen Bd. **31**, S. 43.

[5] Der grössere Theil jener Eigenschaften ist enthalten in einer Arbeit *Over vlakke configuraties,* welche in den Sitz. Ber. d. Kön. Akad. d. Wiss. in Amsterdam veröffentlicht wurde (Serie III, Bd. **5**).

vier mit ihm incidenten Geraden fortgelassen, so bilden die übrigen Punkte und Geraden offenbar eine Cf. 8_3, welche, wie Herr MÖBIUS[1] zuerst gezeigt hat, niemals reell sein kann. Die ebenfalls imaginäre Cf. $(9_4, 12_3)$ wird demnach von zwei einander ein- und umbeschriebenen Vierecken und ihren in einem Punkte zusammenlaufenden vier Diagonalen gebildet.

2. Jeder Punkt einer Cf. $(12_4, 16_3)$ ist von drei Punkten getrennt;[2] ich betrachte nun zunächst diejenigen $(12_4, 16_3)$ in denen jeder Punkt mit den von ihm getrennten Punkten eine involutorische Gruppe bildet, und bezeichne mit 1234, $1'2'3'4'$, $1''2''3''4''$ die drei Quadrupel, in welche sich die Cf.-punkte alsdann anordnen lassen. Es werde ferner die Bezeichnung so gewählt, dass die Cf.-geraden $1'1''$, $2'2''$, $3'3''$, $4'4''$ nach 1 zielen und die Geraden $1'2''$, $1'3''$, $1'4''$ bezüglich die Punkte $2, 3, 4$ enthalten. Die vollständige Untersuchung ergibt nun, dass die Vertheilung der 12 Cf.-punkte über die 16 Cf.-geraden durch jede der nachstehenden Tafeln dargestellt werden kann.

A.

$I \equiv 11'1''$	$V \equiv 21'2''$	$IX \equiv 31'3''$	$XIII \equiv 41'4''$
$II \equiv 12'2''$	$VI \equiv 22'1''$	$X \equiv 32'4''$	$XIV \equiv 42'3''$
$III \equiv 13'3''$	$VII \equiv 23'4''$	$XI \equiv 33'1''$	$XV \equiv 43'2''$
$IV \equiv 14'4''$	$VIII \equiv 24'3''$	$XII \equiv 34'2''$	$XVI \equiv 44'1''$.

B.

$I \equiv 11'1''$	$V \equiv 21'2''$	$IX \equiv 31'3''$	$XIII \equiv 41'4''$
$II \equiv 12'2''$	$VI \equiv 22'1''$	$X \equiv 32'4''$	$XIV \equiv 42'3''$
$III \equiv 13'3''$	$VII \equiv 23'4''$	$XI \equiv 33'2''$	$XV \equiv 43'1''$
$IV \equiv 14'4''$	$VIII \equiv 24'3''$	$XII \equiv 34'1''$	$XVI \equiv 44'2''$.

[1] Ges. Werke, Bd. 1, S. 445.

[2] Herr SCHÖNFLIES nennt 2 Punkte (Gerade) getrennt, wenn sie nicht mit einer Cf.-geraden (einem Cf.-punkte) incident sind. a. a. O.

C.

$I \equiv 11'1''$	$V \equiv 21'2''$	$IX \equiv 31'3''$	$XIII \equiv 41'4''$
$II \equiv 12'2''$	$VI \equiv 22'3''$	$X \equiv 32'4''$	$XIV \equiv 42'1''$
$III \equiv 13'3''$	$VII \equiv 23'4''$	$XI \equiv 33'1''$	$XV \equiv 43'2''$
$IV \equiv 14'4''$	$VIII \equiv 24'1''$	$XII \equiv 34'2''$	$XVI \equiv 44'3''$.

D.

$I \equiv 11'1''$	$V \equiv 21'2''$	$IX \equiv 31'3''$	$XIII \equiv 41'4''$
$II \equiv 12'2''$	$VI \equiv 22'4''$	$X \equiv 32'1''$	$XIV \equiv 42'3''$
$III \equiv 13'3''$	$VII \equiv 23'1''$	$XI \equiv 33'4''$	$XV \equiv 43'2''$
$IV \equiv 14'4''$	$VIII \equiv 24'3''$	$XII \equiv 34'2''$	$XVI \equiv 44'1''$.

3. Die Cf. *A* ist dadurch gekennzeichnet, dass je zwei getrennte Punkte Gegenecken in zwei von Cf.-geraden gebildeten vollständigen Vierseiten sind. Die folgende Tabelle enthält die 12 Geradenquadrupel, welche den verschiedenen Vierseiten angehören.

I	*II*	*V*	*VI*	*V*	*VII*	*XIII*	*XV*
III	*IV*	*VII*	*VIII*	*VI*	*VIII*	*XIV*	*XVI*
I	*III*	*IX*	*XI*	*V*	*VIII*	*IX*	*XII*
II	*IV*	*X*	*XII*	*VI*	*VII*	*X*	*XI*
I	*IV*	*XIII*	*XVI*	*IX*	*X*	*XIII*	*XIV*
II	*III*	*XIV*	*XV*	*XI*	*XII*	*XV*	*XVI*.

In der Cf. *B* zeigen die Paare getrennter Punkte ungleiches Verhalten. Während z. B. 1 und 2 Gegenecken in zwei vollständigen Vierseiten sind, bilden die mit 1 und 3 incidenten Geraden ein Achtseit, dessen Seiten abwechselnd durch 1 und 3 laufen; ich bezeichne diese Figur als STEINERsches Achtseit mit den Hauptecken 1, 3. Die von den Cf.-

geraden gebildeten vollständigen Vierseite und STEINERschen Achtseite sind in der nachstehenden Tabelle enthalten.

I	*II*	*V*	*VI*	Vierseite.
III	*IV*	*VII*	*VIII*	
IX	*X*	*XIII*	*XIV*	
XI	*XII*	*XV*	*XVI*	

I	*IX*	*III*	*XI*	*II*	*X*	*IV*	*XII*	Achtseite.
I	*XIII*	*IV*	*XV*	*II*	*XIV*	*III*	*XV*	
I	*III*	*IX*	*XI*	*V*	*VII*	*XIII*	*XV*	
I	*IV*	*XIII*	*XVI*	*V*	*VIII*	*IX*	*XII*	
I	*III*	*XV*	*XIV*	*VI*	*VIII*	*XII*	*IX*	
I	*IV*	*XII*	*X*	*VI*	*VII*	*XV*	*XIII*	
II	*III*	*XIV*	*XV*	*VI*	*VII*	*X*	*XI*	
II	*IV*	*X*	*XII*	*VI*	*VIII*	*XIV*	*XVI*	
II	*III*	*XI*	*IX*	*V*	*VIII*	*XVI*	*XIV*	
II	*IV*	*XVI*	*XIII*	*V*	*VII*	*XI*	*X*	
V	*IX*	*VIII*	*XII*	*VI*	*X*	*VII*	*XI*	
V	*XIII*	*VII*	*XV*	*VI*	*XIV*	*VIII*	*XVI*.	

Ein weiterer Unterschied zwischen *A* und *B* ergibt sich aus der Betrachtung der Restfigur einer Cf.-geraden, d. h. der Figur, welche die von einer bestimmten Cf.-geraden getrennten Geraden enthält. [1]

In *A* besteht die Restfigur der *I* aus zwei Tripeln gegenseitig getrennter Geraden, nämlich *VII*, *XII*, *XIV* und *VIII*, *X*, *XV*, welche mit den Punkten $2 2' 2'' 3 3' 3'' 4 4' 4''$ eine Cf. $(9_2, 6_3)$ bilden. Indem jedes Tripel sämmtliche neun Punkte enthält, können diese als Basis eines

[1] KANTOR, a. a. O., zweite Abh.

C_3-Büschels betrachtet werden. Die Restfiguren der übrigen Cf.-geraden sind Cf. $(9_2, 6_3)A$ von derselben Art.

In B können die von einer willkürlichen Geraden getrennten Geraden nicht in zwei Tripel gegenseitig getrennter Geraden angeordnet werden. Die Cf. $(9_2, 6_3)B$, welche z. B. die Punkte $2 2' 2'' 3 3' 3'' 4 4' 4''$ mit den von I getrennten Geraden $VII, VIII, X, XI, XIV, XVI$ bilden, besteht aus zwei Dreiecken $3 3' 4''$ und $4 4' 3''$, deren Seitenpaare sich in drei nicht allineirten Punkten $2 2' 2''$ schneiden.

Die Untersuchung der von den Tabellen C und D dargestellten Cf. ergibt, dass sie von der Cf. B nicht verschieden sind.

»Es gibt nur zwei Cf. $(12_4, 16_3)$, deren Punkte drei Quadrupel bilden, in welchen jeder Punkt von den übrigen getrennt ist.»

Ausser den beiden hier auftretenden Cf. $(9_2, 6_3)$ gibt es keine mehr; man zeigt diess am Einfachsten, wenn man ausgeht von der einzigen $(6_2, 4_3)$, dem vollständigen Vierseite.

4. Auf der C_3, welche durch die Ecken der beiden zur $(12_4, 16_3)A$ gehörigen vollständigen Vierseite $I\,II\,V\,VI$ und $II\,III\,XIV\,XV$ bestimmt ist, sind $1 2$, $1'2'$, $1''2''$, $1 4$, $2'3'$, $2''3''$ sechs Paare correspondirender Punkte. Indem die correspondirenden Punkte $1'3'$ aus 1 in die correspondirenden Punkte $1''3''$ projicirt werden, bilden 1 und $3 \equiv (IX, XI)$ ebenfalls ein correspondirendes Paar. Ebenso ergibt sich, dass C_3 die Punkte

$$4' \equiv (VIII, XVI) \quad \text{und} \quad 4'' \equiv (VII, XIII)$$

enthält, welche bezüglich mit $2'$ und $2''$ correspondirende Paare bilden.

»Durch jede $(12_4, 16_3)A$ lässt sich eine zweizügige C_3 legen, auf welcher die 3 Quadrupel getrennter Punkte 3 Punktquadrupel mit allineirten Tangentialpunkten sind, die 16 Geraden somit eine gemeinschaftliche Begleiterin haben.»

Dem vollständigen Vierseite $I\,II\,V\,VI$ und dem Dreiecke $3 3' 3''$ der $(12_4, 16_3)B$ kann man eine C_3 umschreiben, auf welcher $1 2$, $1'2'$, $1''2''$ drei Paare correspondirender Punkte sind, deren Tangentialpunkten $(1 2)$, $(1'2')$, $(1''2'')$ in einer Geraden liegen. Weil ein correspondirendes Punktepaar aus jedem Punkte der C_3 in ein zweites Paar projicirt wird, und 3 als Projection von $1'$ aus $3''$ und als Projection von $2''$ aus $3'$ betrachtet werden kann, enthält C_3 auch den Punkt 4, welcher den Ge-

raden $3''2'$, $3'1''$ gemein ist, und daher mit 3 ein Paar bildet. Die gleiche Betrachtung lehrt, dass $4' \equiv (42'', 31'')$ und $3' \equiv (41'', 32'')$, $4'' \equiv (41', 32')$ und $3'' \equiv (42', 31')$ zwei correspondirende Paare sind. Die den letzten drei Paaren entsprechenden Tangentialpunkte $(34), (3'4'), (3''4'')$ sind die Gegenecken der Tangentialpunkte $(12), (1'2'), (1''2'')$ in einem der C_3 eingeschriebenen vollständigen Vierseite.

»Jeder $(12_4, 16_3)B$ kann man eine C_3 umschreiben, auf welcher die 12 Punkte 6 correspondirende Paare desselben Systems bilden, deren zweite Tangentialpunkte allineirt sind.»

Sechs Punktquadrupel einer zweizügigen C_3, deren Tangentialpunkte die Ecken eines vollständigen Vierseits sind, bilden eine Cf. $(24_8, 64_3)$, welche die vier Cf. $(12_4, 16_3)A$ enthält, deren Geraden die Seiten des Vierseits als Begleiterinnen entsprechen.

Es kann leicht gezeigt werden, dass jene Cf. acht Cf. $(12_4, 16_3)B$ enthält.

5. In der folgenden Tafel werden die beiden $(12_4, 16_3)$ in Bezug auf einige ihrer Eigenschaften verglichen.

A.	*B.*
1. Die Cf. wird gebildet von drei Punktquadrupeln einer zweizügigen C_3; ihre Geraden haben eine gemeinschaftliche Begleiterin.	1. Die Cf. wird gebildet von sechs correspondirenden Paaren einer C_3; die sechs Tangentialpunkte sind Ecken eines vollständigen Vierseits, die Cf.-geraden haben somit eine gemeinschaftliche zweite Begleiterin.
2. Die Cf. ist unzweideutig bestimmt durch ein vollständiges Vierseit und ein Dreieck, dessen Seiten mit drei allineirten Ecken des Vierseits incident sind.	2. Die Cf. ist bestimmt durch ein vollständiges Vierseit und ein Dreieck, dessen Seiten mit drei nicht allineirten Ecken incident sind.
3. Jeder Punkt ist als Ecke sechs vollständigen Vierseiten gemein.	3. Jeder Punkt ist Ecke zweier vollständiger Vierseite und Hauptecke zweier STEINERscher Achtseite.

4. Jede Gerade ist drei vollständigen Vierseiten gemeinschaftlich.	4. Jede Gerade gehört einem vollständigen Vierseite und sechs STEINERschen Achtseiten an.
5. Die Cf. enthält zwölf vollständige Vierseite.	5. Die Cf. enthält vier vollständige Vierseite und zwölf STEINERsche Achtseite.
6. Die Restfigur jeder Cf.-geraden ist eine $(9_2, 6_3)A$.	6. Die Restfigur jeder Cf.-geraden ist eine $(9_2, 6_3)B$.
7. Greift man 6 Gerade heraus, welche einer $(9_2, 6_3)A$ angehören, so sind die übrigen 3 Cf.-punkte allineirt.	7. Entfernt man 6 Gerade, welche einer $(9_2, 6_3)A$ angehören, so sind die übrigen 3 Cf.-punkte Ecken eines von Cf.-geraden gebildeten Dreiecks.
8. Die Cf. enthält acht Quadrupel gegenseitig getrennter Geraden; jede Gerade ist zwei Quadrupeln gemeinschaftlich.	8. Die Cf. enthält keine Quadrupel gegenseitig getrennter Geraden.

6. Wird aus einer $(12_4, 16_3)A$ ein Quadrupel gegenseitig getrennter Geraden fortgelassen, dann bilden die übrigen zwölf Geraden mit den zwölf Cf.-punkten eine regelmässige 12_3. Die Entfernung der Geraden *IV*, *VI*, *IX*, *XV* ergibt zum Beispiel die durch das nachfolgende Schema dargestellte Cf.

1 1′ 1″	2 1′ 2″	3 2′ 4″	4 1′ 4″
1 2′ 2″	2 3′ 4″	3 3′ 1″	4 2′ 3″
1 3′ 3″	2 4′ 3″	3 4′ 2″	4 4′ 1″

Jeder Punkt dieser 12_3 kommt in 3 Cf.-dreiecken vor; die Cf. besteht somit entweder aus einem sich selbst ein- und umbeschriebenen Polygone oder aus einem Cyklus von Polygonen, deren jedes dem folgenden, deren letztes dem ersten eingeschrieben ist.[1] Die nähere Betrachtung der obigen Tabelle lehrt, dass letzteres hier der Fall ist; die Cf. wird gebildet von den beiden Sechsecken 11′4″34′3″ und 1″42′2″23′, welche ein-

[1] SCHÖNFLIES, Math. Ann. a. a. O., § 4.

ander so eingeschrieben sind, dass je zwei auf einander folgende Ecken jedes von ihnen auf zwei einander folgenden Seiten des anderen liegen.

Die Restfigur jedes Punktes dieser 12_3 besteht aus einem Tripel und einem Paare gegenseitig getrennter Punkte, enthält also 6 Cf.-gerade; die Restfigur jeder Geraden kann betrachtet werden als ein Sechsseit, aus welchem eine Seite entfernt ist.

7. Bei weiterer Betrachtung der Cf. $(12_4, 16_3)A$ ergibt sich eine Cf. $(15_4, 20_3)$, deren Eigenschaften ich hier einschalten werde. Ihre Punkte bezeichne ich durch die Combinationen *ik*, ihre Geraden durch die Combinationen *ikl* der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6; es sind alsdann die Punkte *ik*, *kl*, *li* der Geraden *ikl* incident. Die Existenz einer solchen Cf. ergibt sich auf folgende Weise. Werden die Geraden 123, 124, 125, 126 nebst den ihnen incidenten Punkten 13, 23, ... willkürlich angenommen, dann sind die 6 Schnittpunkte der Geradenpaare 1*ik*, 2*ik* die Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten die Perspectivitätsaxen der 4 Paare von Dreiecken bilden, für welche der Punkt 12 das gemeinschaftliche Perspectivitätszentrum ist.

»Zwei einem Vierstrahle eingeschriebene vollständige Vierecke bestimmen eine $(15_4, 20_3)$, in welcher die Restfigur jedes Punktes ein vollständiges Vierseit ist.»

Die Gerade 123 ist mit den Geraden 12*i*, 23*i*, 31*i*, $(i = 4, 5, 6)$ verbunden,[1] die Gerade 456 mit den Geraden 45*k*, 56*k*, 64*k*, $(k = 1, 2, 3)$; die 20 Geraden der Cf. bilden somit 10 Paare »associirter» Geraden: jede Gerade eines solchen Paares stellt mit den neun mit ihr verbundenen Geraden die Restfigur der zweiten Geraden dar.

»Die betrachtete $(15_4, 20_3)$ kann auf zehn Arten aus zwei Tripeln vollständiger Vierseite zusammengesetzt werden; die Vierseite jedes Tripels haben drei allineirte Ecken gemein, die übrigen neun Ecken gehören beiden Tripeln an.»

Die Cf. ist durch eines dieser Tripel vollständig bestimmt. Werden nämlich die Geraden 123, 12*i*, 23*i*, 31*i*, $(i = 4, 5, 6)$ willkürlich angenommen, dann ist 123 die gemeinschaftliche Perspectivitätsaxe der drei

[1] Zwei Gerade heissen verbunden, wenn sie sich in einem Cf.-punkt schneiden. (Schönflies, a. a. O.)

von den übrigen neun Geraden gebildeten Dreiecke. Bezeichnet man ihre Perspectivitätszentren durch 45, 56, 64, dann ist 12 das Perspectivitätszentrum der Dreiecke (14, 15, 16) und (24, 25, 26), wesshalb die Punkte 45, 56, 64 als Schnitte homologer Seiten allineirt sind.

8. In der Cf. $(12_4, 16_3)A$ bestimmt somit die Gerade I mit den mit ihr verbundenen Geraden $II\,V\,VI$, $III\,IX\,XI$, $IV\,XIII\,XVI$ eine $(15_4, 20_3)$ der betrachteten Art, welche ausser diesen 10 Cf.-geraden 9 Cf.-diagonalen enthält; die 20ste Gerade ist mit drei Schnittpunkten von je drei Cf.-diagonalen incident. Werden diese neuen Punkte mit 6′, 8, 7″ bezeichnet, dann ergibt sich für die $(15_4, 20_3)$ nachstehende Tafel.

1 1′ 1″	8 6′ 7″
1 2′ 2″	8 3 4
1 3′ 3″	8 3′ 4′
1 4′ 4″	8 3″ 4″
2 1′ 2″	6′ 2 3
3 1′ 3″	6′ 2′ 3′
4 1′ 4″	6′ 2″ 3″
2 2′ 1″	7″ 2 4
3 3′ 1″	7″ 2′ 4′
4 4′ 1″	7″ 2″ 4″

Die zehn Geraden der zweiten Vertikalreihe bilden mit der Restfigur $(9_2, 6_3)A$ der Geraden 11′1″ in Bezug auf die $(12_4, 16_3)A$ eine zweite Cf. dieser Art, welche durch die folgende Tabelle dargestellt wird.

8 6′ 7″	2 6′ 3	2′ 6′ 3′	2″ 6′ 3″
8 4 3	2 4 7″	2′ 4 3″	2″ 4 3′
8 4′ 3′	2 4′ 3″	2′ 4′ 7″	2″ 4′ 3
8 4″ 3″	2 4″ 3′	2′ 4″ 3	2″ 4″ 7″

Auf der zweizügigen C_3, welche dieser Cf. umschrieben werden kann, sind offenbar 822′2″, 6′44′4″, 7″33′3″ drei Punktquadrupel.

»Die sechszehn in einer $(12_4, 16_3)A$ enthaltenen $(9_2, 6_3)A$ bestimmen ebensoviele neue Cf. $(12_4, 16_3)A$, deren jede von der ursprünglichen Cf. 6 Gerade und 9 Diagonalen absorbirt; die sechszehnte Gerade der neuen Cf. ist derjenigen Geraden der alten Cf. in einer $(15_4, 20_3)$ associirt, für welche die betreffende $(9_2, 6_3)A$ die Restfigur bildet.»

9. Die vollständige Untersuchung der Cf. $(12_4, 16_3)A$ in Bezug auf ihre sämmtlichen Restfiguren ergibt, dass die 18 Diagonalen der Cf. zu dreien nach 12 Punkten zielen, welche mit 16 Geraden incident sind, und mit diesen eine neue $(12_4, 16_3)A$ darstellen, die ich als die »associirte» Cf. bezeichne.

Nachstehende Tabelle enthält die Resultate dieser Untersuchung und die Bezeichnung der Schnittpunkte.

Geradentripel.			Schnittpunkte.
1 2	3′ 4′	1″ 2″	5
1 2	1′ 2′	3″ 4″	6
3 4	1′ 2′	1″ 2″	7
3 4	3′ 4′	3″ 4″	8
2 3	1′ 4′	1″ 4″	5′
2 3	2′ 3′	2″ 3″	6′
1 4	2′ 3′	1″ 4″	7′
1 4	1′ 4′	2″ 3″	8′
1 3	1′ 3′	2″ 4″	5″
1 3	2′ 4′	1″ 3″	6″
2 4	2′ 4′	2″ 4″	7″
2 4	1′ 3′	1″ 3″	8″

Geradenpaare, welche in einer $(15_4, 20_3)$ associirt sind:

1 1′ 1″	8 6′ 7″
1 2′ 2″	8 5′ 8″
1 3′ 3″	7 5′ 7″
1 4′ 4″	7 6′ 8″
2 1′ 2″	8 7′ 6″
2 2′ 1″	8 8′ 5″
2 3′ 4″	7 8′ 6″
2 4′ 3″	7 7′ 5″
3 1′ 3″	5 7′ 7″
3 2′ 4″	5 8′ 8″
3 3′ 1″	6 8′ 7″
3 4′ 2″	6 7′ 8″
4 1′ 4″	5 6′ 6″
4 2′ 3″	5 5′ 5″
4 3′ 2″	6 5′ 6″
4 4′ 1″	6 6′ 5″

Aus dieser Übersicht erhellt, dass die associirten von vier durch einen Cf.-punkt laufenden Geraden der einen Cf. in der associirten Cf. ein vollständiges Vierseit bilden, welches zugleich die Restfigur jenes Punktes in einer $(15_4, 20_3)$ ist, der ausser jenen 8 Geraden noch 12 Diagonalen der ersten $(12_4, 16_3)$ angehören.

Beispiel.

	1′ 2′ 7	1″ 2″ 7	
1 1′ 1″	1′ 3′ 8″	1″ 3″ 8″	8 6′ 7″
1 2′ 2″	1′ 4′ 5′	1″ 4″ 5′	8 5′ 8″
1 3′ 3″	2′ 3′ 6′	2″ 3″ 6′	7 5′ 7″
1 4′ 4″	2′ 4′ 7″	2″ 4″ 7″	7 6′ 8″.
	3′ 4′ 8	3″ 4″ 8	

Die Diagonale 12 des vollständigen Vierseits 121'2'1''2'' wird von den Diagonalen 1'2', 1''2'' beziehungsweise in 6, 5 geschnitten: 1, 2, 5, 6 sind daher harmonische Punkte.

»Die Punkte zweier associirter $(12_4, 16_3)$ trennen sich harmonisch auf den achtzehn ihnen gemeinschaftlichen Diagonalen.»

10. Die achtzehn von den 24 Punkten der beiden Cf. $(12_4, 16_3)$ gebildeten harmonischen Gruppen sind in der nachstehenden Tafel enthalten.

1 2 5 6	1' 2' 6 7	1'' 2'' 5 7
3 4 7 8	3' 4' 5 8	3'' 4'' 6 8
1 3 5'' 6''	1' 3' 5'' 8''	1'' 3'' 6'' 8''
2 4 7'' 8''	2' 4' 6'' 7''	2'' 4'' 5'' 7''
1 4 7' 8'	1' 4' 5' 8'	1'' 4'' 5' 7'
2 3 5' 6'	2' 3' 6' 7'	2'' 3'' 6' 8'

»Die Punkte zweier associirter $(12_4, 16_3)$ bilden mit ihren 18 gemeinschaftlichen Diagonalen eine Cf. $(24_3, 18_4)$, in welcher je vier Punkte einer Geraden eine harmonische Gruppe darstellen.»

Diese »harmonische» Cf. ist aus 2 Tripeln vollständiger Vierecke derart zusammengesetzt, dass je 2 dieser Figuren, welche nicht demselben Tripel angehören, eine gemeinschaftliche Nebenecke haben. Den 9 Nebenecken entsprechend lassen sich die Cf.-geraden demnach in 9 Paare associirter Geraden anordnen.

Aus der Tabelle ist weiter ersichtlich, dass die 8 Geraden, mit welchen eine Cf.-gerade verbunden ist, auch die ihr associirte Gerade in Cf.-punkten schneiden, während die übrigen 8 eine aus 2 Quadrupeln gegenseitig getrennter Geraden gebildete $(16_2, 8_4)$ darstellen, deren Punkte somit die Basis eines C_4-Büschels sind. Jedes associirte Geradenpaar kommt also in 2 Sextupeln gegenseitig getrennter Geraden vor; die Entfernung eines solchen Sextupels liefert eine Cf. $(24_2, 12_4)$.

11. Jedes der in der zweiten Tabelle des § 9 aufgezählten Geradenpaare enthält ein Sextupel gegenseitig getrennter Punkte der harmonischen Cf.; die Ausscheidung eines solchen Sextupels liefert offenbar eine Cf. 18_3.

Werden beispielsweise aus der Tabelle des § 10 die Punkte 11′1″86′7″ fortgelassen, so ergibt sich die Cf.

2 5 6	2′ 6 7	2″ 5 7
3 4 7	3′ 4′ 5	3″ 4″ 6
3 5″ 6″	3′ 5″ 8″	3″ 6″ 8″
2 4 8″	2′ 4′ 6″	2″ 4″ 5″
4 7′ 8′	4′ 5′ 8′	4″ 5′ 7′
2 3 5′	2′ 3′ 7′	2″ 3″ 8′,

welche noch 6 Sextupel getrennter Punkte enthält, entsprechend den 6 associirten Geradenpaaren der beiden $(9_2, 6_3)$, welche in den beiden associirten $(12_4, 16_3)$ die Restfiguren der Geraden 11′1″ und 86′7″ sind.

»Die 18_3 besteht aus zwei Tripeln von Dreiecken (234, 2′3′4′, 2″3″4″ und 567, 5′7′8′, 5″6″8″) in solcher Lage, dass jede Seite und ihre Gegenecke eines dem ersten Tripel entnommenen Dreiecks einer Ecke und deren Gegenseite eines Dreiecks des zweiten Tripels incident sind.»

Werden den Geraden der 18_3 die 3 associirten Geradenpaare

2 3′ 4″	7 8′ 6″
3 4′ 2″	6 7′ 8″
4 2′ 3″	5 5′ 5″

zugesellt, so verschwinden 3 getrennte Punktsextupel und es entsteht eine Cf. $(18_4, 24_3)$, welche in Bezug auf ihre Punkte, nicht mit Rücksicht auf ihre Geraden, regelmässig ist, indem jeder Cf.-punkt in 7 Cf.-dreiecken vorkommt. (Beispielsweise gehört der Punkt 2 den Dreiecken 234, 23′5, 23′8″, 24″6, 24″5′, 255′, 268″ an.)

Die letzten 3 Punktsextupel werden aufgehoben durch Hinzutreten der übrigen Geraden der obengenannten Restfiguren, also der Geradenpaare

2 4′ 3″	7 7′ 5″
3 2′ 4″	5 8′ 8″
4 3′ 2″	6 5′ 6″;

in der nunmehr entstandenen Cf. $(18_5, 30_3)$, welche in Bezug auf jeden ihrer Punkte gleichartig zusammengesetzt ist, erscheint jeder Punkt als Ecke von 15 Cf.-dreiecken. (Für 2 kommen z. B. zu den oben erwähnten noch die Dreiecke 23′4′, 23″4″, 24′5, 24′5′, 23″6, 23″8″, 258″, 25′6.)

12. Einer bekannten Eigenschaft der C_3 zufolge bilden die Nebenecken des Punktquadrupels 1234 mit dem Tangentialpunkte des Quadrupels ein neues Punktquadrupel.[1] Demnach gehören die 3 Tangentialpunkte und die 9 Nebenecken einer $(12_4, 16_3)A$ einer Cf. der nämlichen Art an. Indem diese Nebenecken auch als Nebenecken der Quadrupel der associirten Cf. auftreten, sind sie die Schnittpunkte der Curven 3ter Ordnung, welche den beiden Cf. umbeschrieben werden können, während sie mit den Tangentialpunkten der associirten Cf. wiederum eine $(12_4, 16_3)A$ bilden.

Mit Hülfe der nachstehenden Bezeichnung:

(1256, 3478) ≡ 9
(135″6″, 247″8″) ≡ 10
(147′8′, 235′6′) ≡ 11
(1′2′67, 3′4′58) ≡ 9′
(1′3′5″8″, 2′4′6″7″) ≡ 10′
(1′4′5′8′, 2′3′6′7′) ≡ 11′
(1″2″57, 3″4″68) ≡ 9″
(1″3″6″8″, 2″4″5″7″) ≡ 10″
(1″4″5′7′, 2″3″6′8′) ≡ 11″

ergibt sich, dass die 9 Nebenecken mit den Geraden

9	10′	11″	9	11′	10″
10	11′	9″	10	9′	11″
11	9′	10″	11	10′	9″

[1] DURÈGE, *die ebenen Curven dritter Ordnung*, § 388.

incident sind, mit denen sie die Restfigur $(9_2, 6_3)$ bilden, welche den beiden von den Tangentialpunkten der beiden associirten Cf. bestimmten Cf. $(12_4, 16_3)$ gemeinschaftlich ist.

13. Werden aus der in § 11 betrachteten Cf. 18_3 die sechs gegenseitig getrennten Punkte 23'4"78'6" fortgelassen, so bleibt eine $(12_3, 18_2)$, deren Gerade zu zweien nach den 9 Nebenecken zielen. Fügt man diese 9 Punkte sammt drei gegenseitig getrennten Geraden der obigen $(9_2, 6_3)$ hinzu, so entsteht folgende Cf. 21_3:

5	6	9	2'	6	9'	2"	5	9"
3	4	9	4'	5	9'	3"	6	9"
3	5"	10	5"	8"	10'	3"	8"	10"
4	8"	10	2'	4'	10'	2"	5"	10"
4	7'	11	4'	5'	11'	5'	7'	11"
3	5'	11	2'	7'	11'	2"	3"	11"
9	10'	11"	10	11'	9"	11	9'	10"

In dieser aus je sechs Punkten der beiden associirten $(12_4, 16_3)$ und ihren gemeinschaftlichen Nebenecken und Diagonalen nebst drei mit Nebenecken incidenten Geraden zusammengesetzten Cf. kommt jede Nebenecke in keinem Cf.-dreiecke, jeder der übrigen Punkte in zwei Cf.-dreiecken vor. (Der Punkt 3 findet sich z. B. in den Dreiecken 3 4 10, 3 4 11.)

Eine von dieser Cf. durchaus verschiedene 21_3 ergibt sich, wenn aus der harmonischen Cf. die Punkte einer $(12_4, 16_3)$ fortgelassen, dagegen die Nebenecken sammt drei getrennten Geraden der zugehörigen $(9_2, 6_3)$ hinzugefügt werden. Ihre Geraden sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

1	2	9	1'	2'	9'	1"	2"	9"
3	4	9	3'	4'	9'	3"	4"	9"
1	3	10	1'	3'	10'	1"	3"	10"
2	4	10	2'	4'	10'	2"	4"	10"
1	4	11	1'	4'	11'	1"	4"	11"
2	3	11	2'	3'	11'	2"	3"	11"
9	10'	11"	10	11'	9"	11	9'	10".

Die Punkte dieser 21_3 sind Ecken in 9 oder 4 Cf.-dreiecken je nachdem sie Cf.-punkt oder Nebenecke der $(12_4, 16_3)$ sind.

Indem die übrigen drei Geraden der von den Nebenecken gebildeten $(9_2, 6_3)$ von jedem Quadrupel getrennter Geraden der $(12_4, 16_3)$ getrennt sind, gibt das Hinzutreten dieser sieben Geraden zur obigen 21_3 eine neue Cf., nämlich eine $(21_4, 28_3)$. Die bezügliche Tabelle enthält ausser den im vorhergehenden Schema aufgeführten Geraden noch beispielsweise:

9 11′ 10″	1 1′ 1″
10 9′ 11″	2 3′ 4″
11 10′ 9″	3 4′ 2″
	4 2′ 3″

Wie leicht ersichtlich, ist die Anzahl der Cf.-dreiecke, in denen ein Cf.-punkt vorkommt, in dieser Cf. die nämliche wie in der 21_3 aus welcher sie abgeleitet worden.

14. In § 8 wurde gezeigt, wie jeder Geraden der $(12_4, 16_3)A$ eine Cf. derselben Art zugeordnet ist, welcher die 9 Punkte ihrer Restfigur und die 3 Punkte der associirten Geraden angehören. Um für diese zugeordnete Cf. die associirte Cf. aufzustellen, führe ich für ihre Diagonalschnittpunkte (vgl. § 9) nachstehende Bezeichnung ein.

Diagonalentripel.			Schnittpunkte.
8 2	4′ 4″	7″ 3	(4′4″)
8 2	6′ 4	3′ 3″	(3′3″)
2′ 2″	6′ 4	7″ 3	(2′2″)
2′ 2″	4′ 4″	3′ 3″	1
2 2′	6′ 4″	7″ 3″	(22′)
2 2′	4 4′	3 3′	1″
8 2″	4 4′	7″ 3″	(44′)
8 2″	6′ 4″	3 3′	(33′)
8 2′	6′ 4′	3 3″	(33″)
8 2′	4 4″	7″ 3′	(44″)
2 2″	4 4″	3 3″	1′
2 2″	6′ 4′	7″ 3′	(22″)

Im Anschluss an § 9 stellt die folgende Tafel alsdann die Geraden der associirten $(12_4, 16_3)$ dar.

1 1'' 1'	(2'2'') 1'' (22'')	(3'3'') 1'' (33'')	(4'4'') 1'' (44'')
1 (22')(22'')	(2'2'')(22') 1'	(3'3'')(22')(44'')	(4'4'')(22')(33'')
1 (33')(33'')	(2'2'')(33')(44'')	(3'3'')(33') 1'	(4'4'')(33')(22'')
1 (44')(44'')	(2'2'')(44')(33'')	(3'3'')(44')(22'')	(4'4'')(44') 1'

Mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Punkte 1, 2, 8 die Nebenecken des vollständigen Vierecks 3'4'3''4'' sind, erhellt, dass die Punkte (3'3''), (4'4'') als Schnittpunkte von zwei Gegenseiten mit einer Diagonale durch die Punktepaare 3'3'', 4'4'' von 1 harmonisch getrennt werden.

»Die associirte $(12_4, 16_3)$ der einer Geraden der ursprünglichen $(12_4, 16_3)$ zugeordneten Cf. enthält die Punkte jener Geraden sammt den neun Punkten, von welchen sie durch die Punkte der ursprünglichen Cf. auf den mit ihr verbundenen Geraden harmonisch getrennt ist.»

15. Indem die Punkte 3', 3'' ausser mit 4', 4'' auch mit den Paaren 2'2'', 1'1'' ein dem obigen entsprechendes vollständiges Viereck bilden, müssen noch zwei der 28 analoge Gerade nach dem Punkt (3'3'') zielen. Es sind dies die Geraden 38'' und 46', von denen die zweite schon in der ersten Tabelle des vorigen Paragraphen auftrat.

Die Gerade 28 enthält ausser den Punkten (3'3''), (4'4'') offenbar noch zwei der Punkte, welche auf den Geraden der der ursprünglichen $(12_4, 16_3)$ associirten Cf. deren Punkte von den übrigen beiden auf der betreffenden Cf.-geraden belegenen Cf.-punkten harmonisch trennen. Diess ergibt sich aus der Betrachtung des vollständigen Vierecks 5'6'7''8'', für welches 2, 8, 7 die Nebenecken sind; die Diagonale 28 schneidet nämlich auf den Gegenseiten 5'7'', 6'8'' die von 7 harmonisch getrennten Punkte (5'7''), (6'8'') aus.

»Die Punkte *h*, welche die Punkte zweier associirter $(12_4, 16_3)$ auf deren Geraden zu harmonischen Gruppen ergänzen, bilden mit den Geraden, welche ausser den gemeinschaftlichen Cf.-diagonalen die Punkte der einen $(12_4, 16_3)$ mit denen der anderen Cf. verbinden, eine Cf. $(96_3, 72_4)$.»

Beachtet man, dass die harmonische Cf. $(24_3, 18_4)$ dreipunktige und zweipunktige Cf.-diagonalen besitzt, nämlich die 32 Geraden der beiden associirten Cf. und die 72 oben erwähnten Verbindungslinien, so kann das letzte Ergebniss auch in dieser Form ausgedrückt werden:

»Die zweipunktigen Diagonalen der harmonischen Cf. begegnen den dreipunktigen in 96 Punkten welche mit den Cf.-diagonalen der ersten Art eine $(96_3, 72_4)$ darstellen. Dabei werden auf jeder zweipunktigen Diagonale zwei, auf jeder dreipunktigen drei harmonische Gruppen gebildet, indem jede Cf.-gerade in jedem auf ihr belegenen Cf.-punkte durch je zwei dreipunktige Diagonalen von je einer zweipunktigen harmonisch getrennt wird.»

16. Indem die Punkte $(22')$, $(22'')$ durch die Punktepaare $2, 2'$ und $2, 2''$ von den Punkten $1''$, $1'$ harmonisch getrennt sind, ist die in der letzten Tabelle des § 14 vorkommende Gerade $1(22')(22'')$ harmonisch conjugirt zu $11''1'$ in Bezug auf $12''2'$ und 12, d. h. sie trennt in einem der $(12_4, 16_3)$ angehörigen vollständigen Vierseite eine Seite harmonisch von einer zweiten Seite und einer Nebenseite. Jeder Punkt der $(12_4, 16_3)$ ist somit zwölf derartigen Geraden incident.

Die in der nämlichen Tabelle enthaltene Gerade $(2'2'')(33')(44'')$ schneidet die drei getrennten Geraden $12'2''$, $1''33'$, $1'44''$ in Punkten, welche zu 1, $1''$, $1'$ in Bezug auf die anderen Punkte jeder Geraden harmonisch conjugirt sind. Jede aus Geraden der $(12_4, 16_3)$ gebildete $(9_2, 6_3)$ gibt also 6 Geraden H dieser Art: im Ganzen sind somit 96 Geraden H in jeder $(12_4, 16_3)$ vorhanden, welche zu sechsen mit den 48 Punkten h incident sind. Letzteres erhellt aus dem Umstande, dass z. B. die Gerade $12'2''$ von 6 Geradenpaaren der $(12_4, 16_3)$ getrennt ist, entsprechend den beiden Quadrupeln gegenseitig getrennter Cf.-geraden, in welchen sie vorkommt.

»In jeder $(12_4, 16_3)$ bilden die Punkte h mit den Geraden H eine $(48_6, 96_3)$, welcher die 16 Geraden der $(12_4, 16_3)$ als dreipunktige Cf.-diagonalen angehören; von den zweipunktigen Diagonalen zielen je 12 nach den 12 Punkten der $(12_4, 16_3)$, während ausserdem deren 72 zugleich Diagonalen der harmonischen Cf. sind.»

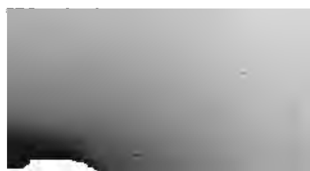
Weil jene 12×12 zweipunktige Diagonalen offenbar zu sechsen mit

den Punkten h incident sind, entsteht eine Cf. $(60_{12}, 240_3)$, wenn sie mit den Punkten der $(12_4, 16_3)$ der $(48_6, 96_3)$ hinzugefügt werden.

Indem jene 72 Geraden auch je zwei Punkte h der associirten Cf. enthalten, sind sie als Cf.-diagonalen den beiden $(48_6, 96_3)$ gemeinschaftlich, welche in Bezug auf die beiden associirten $(12_4, 16_3)$ gebildet werden können: sie stellen eben die in § 15 gefundene $(96_3, 72_4)$ dar.

Werden die 16 Geraden der $(12_4, 16_3)$ als Cf.-gerade in Betracht gezogen, so ergibt sich schliesslich aus den 48 Punkten h eine Cf. $(48_7, 112_3)$, welche der $(12_4, 16_3)$ eingeschrieben ist.





SUR L'ÉQUATION DU SIXIÈME DEGRÉ

PAR

F. BRIOSCHI

À MILAN.

1. *Les invariants d'une forme binaire du sixième degré.*

1. Les expressions des invariants d'une forme binaire du sixième ordre, en fonction de ses coefficients, sont connues depuis longtemps par les travaux de CLEBSCH, GORDAN, CAYLEY, SALMON.[1] Ces invariants sont cinq et des degrés 2, 4, 6, 10, 15.

Soit:

$$u(x_1, x_2) = u_0x_1^6 + 6u_1x_1^5x_2 + 15u_2x_1^4x_2^2 + \ldots + u_6x_2^6$$

la forme du sixième ordre, et:

$$k = \frac{1}{2}(uu)_4 = k_0x_1^4 + 4k_1x_1^3x_2 + \ldots + k_4x_2^4$$

un de ses covariants biquadratiques; on a:

$$k_0 = u_0u_4 - 4u_1u_3 + 3u_2^2, \qquad 2k_1 = u_0u_5 - 3u_1u_4 + 2u_2u_3,$$
$$6k_2 = u_0u_6 - 9u_2u_4 + 8u_3^2, \qquad 2k_3 = u_1u_6 - 3u_2u_5 + 2u_3u_4,$$
$$k_4 = u_2u_6 - 4u_3u_5 + 3u_4^2.$$

[1] CLEBSCH et GORDAN, *Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie*, Annali di Matematica, Serie 2ª, Tomo 1°, 1867. — CAYLEY, *Memoirs upon Quantics.* — SALMON, *Lessons introductory to the modern higher Algebra.*

Les invariants des degrés 2, 4, 6, sont:

$$a = u_0 u_6 - 6u_1 u_5 + 15 u_2 u_4 - 10 u_3^2,$$

$$g_2 = k_0 k_4 - 4 k_1 k_3 + 3 k_2^2,$$

$$g_3 = k_0 k_2 k_4 + 2 k_1 k_2 k_3 - k_1^2 k_4 - k_0 k_3^2 - k_2^3.$$

Les expressions des deux autres invariants se déduisent de celles des trois covariants quadratiques:

$$l = (uk)_4, \qquad m = (lk)_2, \qquad n = (mk)_2,$$

et l'on a: l'invariant du 10me degré:

$$g = \frac{1}{2}(mm)_2 = \frac{1}{2}(ln)_2,$$

et l'invariant gauche du 15me degré:

$$e = \begin{vmatrix} l_0 & m_0 & n_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}.$$

Le carré de ce dernier invariant est une fonction rationnelle, entière, des autres, et en posant:

$$p = \frac{2}{9}[3(g + 4g_2 g_3) - 2a(g_2^2 + 2ag_3)],$$

$$q = \frac{2}{9}[3a(g - 20 g_2 g_3) - 8(4g_2^3 + 27 g_3^2)],$$

on trouve:

$$e^2 = -3[3(g - 20 g_2 g_3)p^2 + 2(g_2^2 + 2ag_3)pq + 4g_3 q^2].$$

Enfin si l'on pose:

$$u(x_1, x_2) = u_0(x_1 - \omega_0 x_2)(x_1 - \omega_1 x_2) \ldots (x_1 - \omega_5 x_2),$$

l'invariant δ, ou discriminant:

$$\delta = u_0^6 (\omega_0 - \omega_1)^2 (\omega_0 - \omega_2)^2 \ldots (\omega_4 - \omega_5)^2$$

s'exprime en fonction des invariants a, g_2, g_3, g de la manière suivante:[1]

$$\delta = 3^5 \cdot 4^3[32a^2(5^4 \cdot g_3 + 5^3 \cdot ag_2 - 4a^3) - 5^5(8ag_2^2 + 48g_2g_3 + 3g)],$$

et en conséquence on peut substituer δ à g.

2. Par la transformation linéaire:

$$x_1 = \mu(\xi_2 + \omega_5\xi_1), \qquad x_2 = \mu\xi_1$$

on obtient:

$$u(x_1, x_2) = U(\xi_1, \xi_2),$$

étant:

$$U(\xi_1, \xi_2) = \xi_2(\xi_1 - \eta_0\xi_2)(\xi_1 - \eta_1\xi_2)\ldots(\xi_1 - \eta_4\xi_2),$$

$$\mu^6 = \frac{1}{u_0(50)(51)(52)(53)(54)}, \qquad \eta_r = \frac{1}{(r5)}$$

et

$$(rs) = \omega_r - \omega_s.$$

Soit:

$$U(\xi_1, \xi_2) = \xi_2(\xi_1^5 + 5p_1\xi_1^4\xi_2 + 10p_2\xi_1^3\xi_2^2 + \ldots + p_5\xi_2^5),$$

et calculons les invariants des degrés 2, 4, 6 de cette nouvelle forme du sixième ordre, que j'indique par $\alpha, \gamma_2, \gamma_3$. Je supposerai $p_1 = 0$, ce qui n'ôte rien à la généralité de ce qui suit. On a ainsi:

$$\alpha = -\frac{5}{6}(p_4 + 3p_2^2), \qquad \gamma_2 = \frac{1}{18}(10p_2^2p_4 - 4p_2p_3^2 + 6p_2^4 + p_3p_5),$$

$$\gamma_3 = -\frac{1}{3^3 \cdot 4^2}[16p_3^4 + 16p_2^6 + 64p_2^3p_3^2 - 80p_2^4p_4 - 20p_2p_3^2p_4 - 4p_2^2p_3p_5 - p_2p_5^2],$$

et, comme donne la théorie des invariants,

$$\mu^{12}a = \alpha, \qquad \mu^{24}g_2 = \gamma_2, \qquad \mu^{36}g_3 = \gamma_3, \qquad \mu^{60}\delta = \Delta,$$

Δ étant le discriminant de la forme $U(\xi_1, \xi_2)$.

---

[1] Annali di Matematica, Serie 2ª, Tomo 1°, *Il discriminante delle forme binarie del sesto ordine.*

2. *Recherches anciennes sur certaines équations du sixième degré.*

1. J'ai déjà fait connaître [1] les travaux de deux géomètres italiens, MALFATTI et RUFFINI, relatifs à l'équation du 5me degré, et le lien entre ces anciennes recherches et celles dues à JACOBI, CAYLEY et d'autres géomètres anglais. [2]

Je vais rappeler en peu de mots comment on arrive à l'équation du sixième degré que j'ai nommée *résolvante* de MALFATTI. Considérons l'équation du 5me degré:

$$\xi^5 + 10p_2\xi^3 + 10p_3\xi^2 + 5p_4\xi + p_5 = 0$$

dont les racines sont $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_4$. En posant avec MALFATTI:

$$\eta_0 = m + p + q + n, \qquad \eta_1 = \varepsilon m + \varepsilon^2 p + \varepsilon^3 q + \varepsilon^4 n,$$
$$\eta_2 = \varepsilon^2 m + \varepsilon^4 p + \varepsilon q + \varepsilon^3 n, \qquad \eta_3 = \varepsilon^3 m + \varepsilon p + \varepsilon^4 q + \varepsilon^2 n,$$
$$\eta_4 = \varepsilon^4 m + \varepsilon^3 p + \varepsilon^2 q + \varepsilon n,$$

dans lesquelles $1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^4 = \sqrt{5}$, on trouve que le produit $\rho = mnpq$ est une fonction des racines $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_4$ n'ayant que six valeurs; en effet elle est cyclique, invariable pour les substitutions:

$$\begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ 3r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ 4r \end{pmatrix},$$

et les six valeurs sont correspondantes aux substitutions:

$$\begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ (2r)^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ (2r)^3 + 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} r \\ (2r)^3 + 4 \end{pmatrix}.$$

En posant:

$$w = 5^2[15\rho - 12p_2^2 + p_4],$$

[1] *Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado*, Annali di Matematica, Serie 1ª, Tomo 5°, 1864.

[2] JACOBI, *Observatio de aequatione sexti gradus, ad quam aequationes quinti gradus revocari possunt,* Journal de Crelle, T. 13.

CAYLEY, Philosophical Transactions, T. 151.

la résolvante de MALFATTI est la suivante:

$$[w^3 + 4 \cdot 5 \cdot 3^3 \cdot \beta w + 4^2 \cdot 5 \cdot 3^3 \cdot \gamma]^2 + 3^5[w + 5 \cdot 6\alpha]\Delta = 0,$$

dans laquelle:

$$\beta = \frac{5^2}{2 \cdot 3^2}[2p_4^2 - 18p_2^2p_4 + 12p_2p_3^2 - 3p_3p_5],$$

$$\gamma = \frac{5^3}{4^2 \cdot 3^3}[36(12p_2^2p_4^2 + 12p_3^4 - 31p_2p_3^2p_4 + 9p_2^2p_3p_5 + 4p_3p_4p_5) - 27p_2p_5^2 - 112p_4^3],$$

et α, Δ ont les valeurs supérieures.

Or les valeurs de β, γ peuvent s'exprimer en fonctions des invariants α, γ_2, γ_3 de la manière suivante:

$$\beta = 4\alpha^2 - 3 \cdot 5^2 \cdot \gamma_2; \qquad \gamma = 56\alpha^3 - 4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \alpha\gamma_2 - 3^3 \cdot 5^3 \cdot \gamma_3;$$

et par conséquent la résolvante de MALFATTI peut être considérée comme une transformée d'une équation spéciale du 6me degré, transformée dont les coefficients sont des invariants de la même équation.

2. La valeur fondamentale $\binom{r}{r}$ qu'on obtient en formant le produit $\rho = mnpq$ donne pour w_0 la valeur:

$$w_0 = -20p_4 - 3\psi,$$

étant:

$$\psi = \eta_0^2(\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_4) + \eta_1^2(\eta_0\eta_2 + \eta_3\eta_4) + \eta_2^2(\eta_1\eta_3 + \eta_0\eta_4)$$
$$+ \eta_3^2(\eta_2\eta_4 + \eta_0\eta_1) + \eta_4^2(\eta_1\eta_2 + \eta_0\eta_3);$$

ou si l'on pose:

$$\gamma_5^4 = (\eta_1 - \eta_3)(\eta_0 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_4)(\eta_4 - \eta_0), \quad \gamma_0^4 = (\eta_2 - \eta_4)(\eta_1 - \eta_3)(\eta_3 - \eta_0)(\eta_0 - \eta_1),$$

$$\gamma_{12}^4 = (\eta_2 - \eta_3)(\eta_0 - \eta_1)(\eta_1 - \eta_4)(\eta_4 - \eta_0), \quad \gamma_{34}^4 = (\eta_1 - \eta_4)(\eta_0 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_3)(\eta_3 - \eta_0),$$

on a:

$$w_0 = 2\gamma_{34}^4 - \gamma_5^4 - \gamma_0^4 - \gamma_{12}^4,$$

et l'on déduit au moyen des substitutions:

$$\binom{r}{(2r)^3}, \quad \binom{r}{(2r)^3 + 1}, \quad \binom{r}{(2r)^3 + 4},$$

$$w_1 = 2\gamma_{12}^4 - \gamma_{34}^4 - \gamma_5^4 - \gamma_0^4; \qquad w_2 = 2\gamma_5^4 - \gamma_0^4 - \gamma_{12}^4 - \gamma_{34}^4;$$

$$w_3 = 2\gamma_0^4 - \gamma_{12}^4 - \gamma_{34}^4 - \gamma_5^4;$$

et les substitutions:

$$\begin{pmatrix} r \\ (2r)^3+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \\ (2r)^3+3 \end{pmatrix}$$

donnent:

$$w_4 = 2\gamma_5^4 - \gamma_2^4 - \gamma_{03}^4 - \gamma_{14}^4,$$
$$w_5 = 2\gamma_5^4 - \gamma_{01}^4 - \gamma_4^4 - \gamma_{23}^4,$$

étant:

$$\gamma_2^4 = (\eta_0-\eta_4)(\eta_1-\eta_2)(\eta_2-\eta_3)(\eta_3-\eta_1), \quad \gamma_{03}^4 = (\eta_0-\eta_1)(\eta_2-\eta_4)(\eta_4-\eta_3)(\eta_3-\eta_2),$$

$$\gamma_{14}^4 = (\eta_3-\eta_4)(\eta_0-\eta_1)(\eta_1-\eta_2)(\eta_2-\eta_0), \quad \gamma_{01}^4 = (\eta_0-\eta_3)(\eta_1-\eta_2)(\eta_2-\eta_4)(\eta_4-\eta_1),$$

$$\gamma_4^4 = (\eta_0-\eta_2)(\eta_1-\eta_3)(\eta_3-\eta_4)(\eta_4-\eta_1), \quad \gamma_{23}^4 = (\eta_1-\eta_2)(\eta_0-\eta_3)(\eta_3-\eta_4)(\eta_4-\eta_0).$$

3. Comme j'ai démontré autrefois, si dans l'équation supérieure de MALFATTI on pose

$$w + 5.6.\alpha = -3\lambda^2,$$

on obtient la transformée:

$$\lambda^6 + 30\alpha\lambda^4 + 60(5\alpha^2+\beta)\lambda^2 + \Delta^{\frac{1}{2}}\lambda + 40(25\alpha^3 + 15\alpha\beta - 2\gamma) = 0,$$

ou les résolvantes de JACOBI et de M. CAYLEY.

3. *Conséquences des résultats exposés dans le chapitre précédent.*

1. Soit, comme dans le chapitre 1[r], $(rs) = \omega_r - \omega_s$, et considérons les dix fonctions suivantes des racines $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_5$:

$$c_5^4 = (02)(24)(40)(13)(35)(51), \qquad c_0^4 = (01)(13)(30)(24)(45)(52),$$

$$c_{12}^4 = (01)(14)(40)(23)(35)(52), \qquad c_{34}^4 = (02)(23)(30)(14)(45)(51),$$

$$c_{23}^4 = (03)(34)(40)(12)(25)(51), \qquad c_{14}^4 = (01)(12)(20)(34)(45)(53),$$

$$c_4^4 = (02)(25)(50)(13)(34)(41), \qquad c_{03}^4 = (01)(15)(50)(23)(34)(42),$$

$$c_{01}^4 = (03)(35)(50)(12)(24)(41), \qquad c_2^4 = (04)(45)(50)(12)(23)(31).$$

Entre ces fonctions on a les relations connues:

$$c_{23}^4 + c_{14}^4 = c_5^4 + c_0^4 - c_{12}^4 - c_{34}^4,$$
$$c_4^4 + c_{03}^4 = c_5^4 - c_0^4 + c_{12}^4 - c_{34}^4,$$
$$c_{01}^4 + c_2^4 = c_5^4 - c_0^4 - c_{12}^4 + c_{34}^4,$$
$$c_{23}^4 - c_{14}^4 = c_4^4 - c_{03}^4 = c_{01}^4 - c_2^4,$$

et en conséquence si l'on indique par $\mathfrak{Q}$ un quelconque de ces derniers binomes, et l'on pose:

$$c_5^4 = c_1, \qquad c_0^4 = c_2, \qquad c_{12}^4 = c_3, \qquad c_{34}^4 = c_4,$$

on aura:

$$c_{23}^4 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \mathfrak{Q}), \qquad c_{14}^4 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \mathfrak{Q}),$$
$$c_4^4 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \mathfrak{Q}), \qquad c_{03}^4 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \mathfrak{Q}),$$
$$c_{01}^4 = \frac{1}{2}(\alpha_3 + \mathfrak{Q}), \qquad c_2^4 = \frac{1}{2}(\alpha_3 - \mathfrak{Q}),$$

étant:

$$\alpha_1 = c_1 + c_2 - c_3 - c_4, \quad \alpha_2 = c_1 - c_2 + c_3 - c_4, \quad \alpha_3 = c_1 - c_2 - c_3 + c_4.$$

Soit:

$$c^4 + q_1c^3 + q_2c^2 + q_3c + q_4 = 0$$

l'équation dont les racines sont c_1, c_2, c_3, c_4; la relation connue:

$$c_{23}^2c_{14}^2 = c_5^2c_0^2 - c_{12}^2c_{34}^2$$

donne pour $\mathfrak{Q}^2$ la valeur:

$$\mathfrak{Q}^2 = q_1^2 - 4q_2 + 8\sqrt{q_4}.$$

2. On a vu au chapitre 1[r] que les racines $\eta_0, \eta_1, \ldots$ sont liées aux racines $\omega_0, \omega_1, \ldots$ par la relation:

$$\eta_r = \frac{1}{(r5)};$$

on en déduit très facilement qu'entre une quelconque des fonctions γ_{rs}^4 et la correspondante c_{rs}^4 on a celle-ci:

$$\gamma_{rs}^4 = u_0^2 \mu^{12} c_{rs}^4;$$

en conséquence, si l'on pose, par exemple:

$$y_0 = u_0^2[2c_4 - c_1 - c_2 - c_3],$$

on aura:

$$w_0 = \mu^{12} y_0$$

et en général

$$w_r = \mu^{12} y_r.$$

Indiquons maintenant par b, c des quantités analogues aux β, γ du chapitre précédent, c'est à dire:

$$b = 4a^2 - 3.5^2.g_2, \qquad c = 56a^3 - 4.3^2.5^2.ag_2 - 3^3.5^3.g_3,$$

on aura:

$$\mu^{24} b = \beta, \qquad \mu^{36} c = \gamma,$$

et de la résolvante de MALFATTI on déduira la suivante:

$$\text{(A)} \qquad [y^3 + 4.5.3^3.by + 4^2.5.3^3.c]^2 + 3^5[y + 5.6.a]\delta = 0,$$

ou l'autre:

$$\text{(B)} \quad z^6 + 30az^4 + 60(5a^2 + b)z^2 + \delta^{\frac{1}{2}} z + 40(25a^3 + 15ab - 2c) = 0,$$

z étant liée à y par la relation:

$$y + 5.6a = -3z^2.$$

On arrive ainsi à ce résultat remarquable, que les quatre invariants:

$$b, c, \delta, a\delta$$

de la forme $u(x_1, x_2)$ du sixième ordre peuvent s'exprimer en fonction des dix quantités c_{rs}.

On peut observer: que chacun de ces quatre invariants est iden-

tiquement égal à zéro si la forme u a un facteur triple; et que leurs valeurs en fonction de c_1, c_2, c_3, c_4 sont les suivants:

$$b = -\frac{1}{3^2 \cdot 4 \cdot 5}(q_1^2 - 3q_2 + 3\sqrt{q_4}), \qquad \delta = (q_8 - q_1\sqrt{q_4})\sqrt{q_4},$$

$$c = -\frac{1}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5}[4q_1^3 - 18q_1q_2 + 27q_3 + 18q_1\sqrt{q_4}],$$

$$a\delta = -\frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5}[4q_1^2 q_4 - 12q_2q_4 + 3q_3^2 + 24q_4\sqrt{q_4} - 4q_1q_3\sqrt{q_4}].$$

4. *Transformation de l'équation générale du sixième degré. Sa forme normale.*

1. J'ai montré il y a quelques années[1] de quelle manière on peut transformer une équation générale du sixième degré au double point de vue d'annuler un ou plusieurs des coefficients de la transformée et de rendre les autres des invariants de l'équation donnée.[2]

Soient, comme au chapitre 1r, $u(x_1, x_2)$ une forme du sixième ordre, $k = \frac{1}{2}(uu)_4$ un de ses covariants biquadratiques, δ son discriminant; si des deux formes du cinquième ordre:

$$\varphi = tu_1 + x_2 k\delta^{\frac{1}{2}} = 0, \qquad \psi = tu_2 - x_1 k\delta^{\frac{1}{2}} = 0,$$

dans lesquelles:

$$u_1 = \frac{1}{6}\frac{du}{dx_1}, \qquad u_2 = \frac{1}{6}\frac{du}{dx_2},$$

on élimine le rapport $x_1 : x_2$, on obtient l'équation:

$$t^6 + u_{12}t^4 + u_{14}\delta t^2 + u_{15}\delta^{\frac{3}{2}}t + u_{16}\delta^2 = 0,$$

$u_{12}, u_{14}, u_{15}, u_{16}$ étant des fonctions rationnelles, entières des invariants de la forme u des degrés 12, 14, 15, 16.

---

[1] Annali di Matematica, Serie 2a, T. 11, *Sulle relazioni esistenti fra covarianti ed invarianti di una stessa forma binaria.*

[2] Pour la théorie générale de ces transformations on peut consulter l'important Mémoire de M. Hermite: *Sur l'équation du 5me degré,* pag. 11 et suivantes.

Avant de déterminer la valeur de ces coefficients, il est opportun de démontrer une propriété remarquable des racines $t_0, t_1, \ldots, t_5$ de la nouvelle équation corréspondantes aux racines $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_5$ de l'équation $u(x) = 0$. On voit tout de suite que, étant:

$$t_r = -\frac{6k(\omega_r)}{u'(\omega_r)}\delta^{\frac{1}{2}},$$

on aura:

$$t_r = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{5^2.6.u'(\omega_r)}[5u'(\omega_r)u'''(\omega_r) - 3u''^2(\omega_r)].$$

Considérons la racine t_0, en posant:

$$m_r = \frac{1}{\omega_0 - \omega_r} = \frac{1}{(0r)},$$

on a:

$$\frac{u''(\omega_0)}{u'(\omega_0)} = 2\sum_1^5{}_r m_r, \qquad \frac{4u'(\omega_0)u'''(\omega_0) - 3u''^2(\omega_0)}{u'^2(\omega_0)} = -12\sum_1^5{}_r m_r^2,$$

et en conséquence:

$$\frac{5u'(\omega_0)u'''(\omega_0) - 3u''^2(\omega_0)}{u'(\omega_0)} = 6u'(\omega_0)[\sum m_r m_s - 2\sum m_r^2].$$

On aura ainsi:

$$5^2.t_0 = u'(\omega_0)[\sum m_r m_s - 2\sum m_r^2]\delta^{\frac{1}{2}}$$

ou:

$$5^2.t_0 = \delta^{\frac{1}{2}}[\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \psi_5],$$

ayant indiqué par $\psi_1, \psi_2, \ldots$ les expressions suivantes:

$$\psi_1 = \frac{1}{(10)}[(03)(04)(12)(15) + (02)(05)(13)(14)],$$

$$\psi_2 = \frac{1}{(20)}[(04)(05)(23)(21) + (03)(01)(24)(25)],$$

$$\psi_3 = \frac{1}{(30)}[(05)(01)(34)(32) + (04)(02)(35)(31)],$$

$$\psi_4 = \frac{1}{(40)}[(01)(02)(45)(43) + (05)(03)(41)(42)],$$

$$\psi_5 = \frac{1}{(50)}[(02)(03)(51)(54) + (01)(04)(52)(53)],$$

qui se déduisent l'une de l'autre par la substitution cyclique (12345). En se rappelant les valeurs des dix quantités c^4_{rs} données au chapitre précédent, on trouve que $\psi_1, \psi_2, \ldots$ peuvent aussi s'exprimer comme il suit:

$$\psi_1 = -\frac{c^4_{23} + c^4_4}{(01)(25)(34)}, \qquad \psi_2 = \frac{c^4_2 - c^4_0}{(02)(13)(45)}, \qquad \psi_3 = \frac{c^4_{03} + c^4_5}{(03)(15)(24)},$$

$$\psi_4 = \frac{c^4_{14} - c^4_{01}}{(04)(12)(35)}, \qquad \psi_5 = -\frac{c^4_{34} + c^4_{12}}{(05)(14)(23)}.$$

Mais on démontre très facilement, et c'est connu, que chacune des cinq expressions:

$$(01)(25)(34)c^2_5\, c^2_2\, c^2_{01}c^2_{34},$$
$$(02)(13)(45)c^2_{01}c^2_{03}c^2_{12}c^2_{23},$$
$$(03)(15)(24)c^2_2\, c^2_4\, c^2_{14}c^2_{12},$$
$$(04)(12)(35)c^2_4\, c^2_0\, c^2_{34}c^2_{03},$$
$$(05)(14)(23)c^2_0\, c^2_5\, c^2_{23}c^2_{14}$$

est égale à $\Pi c = \delta^{\frac{1}{2}}$. On aura en conséquence:

$$\delta^{\frac{1}{2}}.\psi_1 = -\, c^2_5\, c^2_2\, c^2_{01}c^2_{34}[c^4_{23} + c^4_4],$$
$$\delta^{\frac{1}{2}}.\psi_2 = \quad c^2_{01}c^2_{03}c^2_{12}c^2_{23}[c^4_2 - c^4_0],$$
$$\delta^{\frac{1}{2}}.\psi_3 = \quad c^2_2\, c^2_4\, c^2_{14}c^2_{12}[c^4_{03} + c^4_5],$$
$$\delta^{\frac{1}{2}}.\psi_4 = \quad c^2_4\, c^2_0\, c^2_{34}c^2_{03}[c^4_{14} - c^4_{01}],$$
$$\delta^{\frac{1}{2}}.\psi_5 = -\, c^2_0\, c^2_5\, c^2_{23}c^2_{14}[c^4_{34} + c^4_{12}];$$

d'autre part, des relations connues entre les carrés des fonctions c_{rs}, on déduit que:

$$c^2_{01}c^2_{03}c^2_{12}c^2_{23} = \quad c^4_{01}(c^4_{34} + c^4_{03}) - c^2_5c^2_2c^2_{01}c^2_{34},$$
$$c^2_2\, c^2_4\, c^2_{14}c^2_{12} = -\, c^4_2\,(c^4_{01} + c^4_{12}) + c^2_5c^2_2c^2_{01}c^2_{34},$$
$$c^2_4\, c^2_0\, c^2_{34}c^2_{03} = \quad c^4_{34}(c^4_5 - c^4_0) - c^2_5c^2_2c^2_{01}c^2_{34},$$
$$c^2_0\, c^2_5\, c^2_{23}c^2_{14} = \quad c^4_5\,(c^4_{14} - c^4_2) + c^2_5c^2_2c^2_{01}c^2_{34};$$

donc en observant qu'on a:

$$-c^4_{23}-c^4_4-c^4_2+c^4_0+c^4_{03}+c^4_5-c^4_{14}+c^4_{01}-c^4_{34}-c^4_{12}=0,$$

on arrive à ce résultat: que les racines $t_0, t_1, \ldots$ sont exprimables en fonction des quantités c^4_{rs}. On a pour t_0:

$$5^2.t_0=c^4_5[c^4_2c^4_{34}-c^4_2c^4_{01}-c^4_{12}c^4_{14}-c^4_{01}c^4_{34}]-c^4_0[c^4_{14}c^4_{34}+c^4_{01}c^4_{03}]$$
$$+c^4_2[c^4_{01}c^2_{31}-c^4_{03}c^4_{12}].$$

Au moyen des relations établies dans le chapitre précédent entre les dix quantités c^4_{rs} on arrive à démontrer que les racines $t_0, t_1, \ldots$ peuvent se représenter comme il suit:

$$5^2.t_0=b_1+a_1, \qquad 5^2.t_5=b_1-a_1,$$
$$5^2.t_2=b_2+a_2, \qquad 5^2.t_1=b_2-a_2,$$
$$5^2.t_4=b_3+a_3, \qquad 5^2.t_3=b_3-a_3,$$

dans lesquelles:

$$a_1=c_1c_2(c_3+c_4)-c_3c_4(c_1+c_2)-(c_1+c_2)(c_3+c_4)\alpha_1+2\alpha_1\sqrt{q_4},$$
$$a_2=c_1c_3(c_4+c_2)-c_4c_2(c_1+c_3)-(c_1+c_3)(c_4+c_2)\alpha_2+2\alpha_2\sqrt{q_4},$$
$$a_3=c_1c_4(c_2+c_3)-c_2c_3(c_1+c_4)-(c_1+c_4)(c_2+c_3)\alpha_3+2\alpha_3\sqrt{q_4},$$

et:

$$b_1=(c_1-c_2)(c_3-c_4)\Omega, \qquad b_2=(c_1-c_3)(c_4-c_2)\Omega,$$
$$b_3=(c_1-c_4)(c_2-c_3)\Omega$$

et en conséquence $b_1+b_2+b_3=0$, comme cela devait être.

Mais, ce qui est remarquable pour le but que nous avons en vue, ces quantités $a_1, b_1, \ldots$ sont des fonctions des quinze différences deux à deux des racines $y_0, y_1, \ldots, y_5$. A l'aide des relations démontrées précédemment on transforme en effet les expressions supérieures dans les suivantes:

$$54a_1=[02][15][34]+[02][14][35]+[04][13][25]+[05][13][24],$$
$$(1)\quad 54a_2=[01][25][34]+[01][24][35]-[04][15][23]-[05][14][23],$$
$$54a_3=-[03][14][25]-[03][15][24]+[04][12][35]+[05][12][34],$$
$$27b_1=-[01][23][45], \qquad 27b_2=-[03][12][45], \qquad 27b_3=[02][13][45],$$

dans lesquelles

$$[rs] = y_r - y_s$$

et l'on a posé $u_0 = 1$.

2. En vertu d'un théorème connu de la théorie des formes, les coefficients de la transformée en t seront, en conséquence des valeurs supérieures de $a_1, b_1, \ldots$, non seulement des invariants ou des fonctions d'invariants de la forme $u(x_1, x_2)$, comme nous l'avons démontré, mais aussi des invariants, ou des fonctions des invariants de l'équation (A) en y. La détermination de la valeur de ces coefficients se réduit alors à la calculation de quelques coefficients numériques. Il est évident que le coefficient u_{12} est égal à l'invariant du second degré de l'équation (A), sauf un coefficient numérique; que $u_{14}\delta$ est égal à un invariant du quatrième degré; $u_{15}\delta^{\frac{3}{2}}$ égal à la racine carrée du discriminant, $u_{16}\delta^2$ égal à un invariant du sixième degré.

Soient, pour l'équation (A), l, m, n ses invariants des degrés 2, 4, 6 analogues aux invariants a, b, c de la forme u; et soit p le discriminant. En posant:

$$v = \frac{1}{2} 3^3 . 5^2 . t,$$

on trouve que l'équation en t ou en v est la suivante:

$$\text{(C)} \qquad v^6 + 30lv^4 + 60(5l^2 + m)v^2 + p^{\frac{1}{2}}v + 40(25l^3 + 15lm - 2n) = 0,$$

et à cette équation je donne la dénomination de *forme normale* de l'équation du sixième degré.

Cette équation à la même forme que l'équation (B) en z, par conséquent si l'on pose:

$$\sigma + 5 . 6 . l = -3v^2,$$

elle se transforme dans la suivante:

$$\text{(D)} \qquad [\sigma^3 + 4 . 5 . 3^3 . m\sigma + 4^2 . 5 . 3^3 . n]^2 + 3^6[\sigma + 5 . 6 . l]p = 0.$$

La détermination des valeurs de l, m, n, en fonction des invariants

a, b, c, δ de la forme $u(x_1, x_2)$, ne présente ainsi aucune difficulté, et l'on trouve:

$$l = 2 . 5 . 4^3 . 3^8 [3ad + 5b^3 + c^2],$$

$$5l^2 + m = 5^2 . 4^6 . 3^{18} [(11a^2 - 2b)d + 4a(5b^3 + c^2) \\ + 18b^2(5ab - c)]d,$$

$$25l^3 + 15lm - 2n = - 2 . 5^3 . 4^8 . 3^{27} [4(8a^3 + 12ab - c)d \\ + 12(a^2 - 4b)(5b^3 + c^2) - 4 . 3^5 . ab^2(5ab - c) + 3^5 . b^4]d^2;$$

ayant posé:

$$d = \frac{1}{3^2 . 4^3} \delta.$$

Enfin $p^{\frac{1}{2}}$ nous l'avons démontré égal, sauf un coefficient numérique, à $u_{15} \delta^{\frac{8}{3}}$; or la forme $u(x_1, x_2)$ ne peut avoir d'autre invariant du quinzième degré que l'invariant gauche qu'on a indiqué par e dans le chapitre 1r, et on trouve:

$$p^{\frac{1}{2}} = - 4^4 . 5^{10} . 3^{24} . e \delta^{\frac{8}{3}}.$$

La forme normale des équations du sixième degré est par conséquent complètement calculée.

Cette équation normale est, comme on a vu, le résultat de l'élimination du rapport $x_1 : x_2$ de deux équations du cinquième degré $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Il est évident que de ces deux équations on pourrait aussi déduire la valeur de $x_1 : x_2$ en fonction rationnelle de t, c'est à dire que la recherche des valeurs de $\omega_0, \omega_1, \ldots$ ou la résolution de l'équation générale du sixième degré $u(x) = 0$ dépend entièrement de la résolution de l'équation en t.

3. La forme de l'équation supérieure en σ montre tout de suite, si on se rappelle l'équation (A), de quelle manière les racines $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ sont formées avec les $y_0, y_1, \ldots$. En indiquant par h_{rs} les dix fonctions qu'on obtient en substituant dans les c_{rs} les racines $y_0, y_1, \ldots$ aux racines $\omega_0, \omega_1, \ldots$, on arrive très facilement à ce résultat:

$$\sigma_0 = 2h_5^4 - h_0^4 - h_{12}^4 - h_{34}^4,$$

$$\sigma_1 = 2h_0^4 - h_{12}^4 - h_{34}^4 - h_5^4 = h_0^4 + h_{14}^4 + h_{23}^4 - 2h_5^4,$$

$$\sigma_4 = 2h_{12}^4 - h_{34}^4 - h_5^4 - h_0^4 = h_{12}^4 + h_{03}^4 + h_4^4 - 2h_5^4,$$

$$\sigma_2 = 2h_{34}^4 - h_5^4 - h_0^4 - h_{12}^4 = h_{34}^4 + h_2^4 + h_{01}^4 - 2h_5^4,$$

$$\sigma_3 = 2h_5^4 - h_{23}^4 - h_4^4 - h_{01}^4,$$

$$\sigma_5 = 2h_5^4 - h_{14}^4 - h_{03}^4 - h_2^4,$$

et de ces relations on déduit les suivantes:

$$\text{(E)}\quad \begin{aligned}
h_5^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4), & h_{12}^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_0),\\
h_0^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_0 + \sigma_4 + \sigma_2), & h_{34}^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_0 + \sigma_4 + \sigma_1),\\
h_{23}^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_3), & h_{14}^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_5),\\
h_4^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), & h_{03}^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_5),\\
h_{01}^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_4 + \sigma_1 + \sigma_3), & h_2^4 &= -\frac{1}{3}(\sigma_4 + \sigma_1 + \sigma_5).
\end{aligned}$$

Ces relations nous seront utiles dans le chapitre qui suit.

5. *Résolution de l'équation du sixième degré.*

1. Soient

$$u_1 = \int \frac{z_1(z_2dz_1 - z_1dz_2)}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}, \qquad u_2 = \int \frac{z_2(z_2dz_1 - z_1dz_2)}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}$$

deux intégrales hyperelliptiques de première espèce; et soient $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}; \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{23}, \omega_{24}$ les périodes normales primitives. En posant:

$$p_{rs} = \omega_{1r}\omega_{2s} - \omega_{2r}\omega_{1s} = -p_{sr},$$

on a, comme il est connu:[1]

$$p_{13}+p_{24}=0,\qquad p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0,$$

et si:

$$v_1=\frac{1}{p_{12}}(u_1\omega_{22}-u_2\omega_{12}),\qquad v_2=\frac{1}{p_{21}}(u_1\omega_{21}-u_2\omega_{11}),$$

les nouvelles périodes seront:

$$\text{pour } v_1:\quad 1,\ 0,\qquad \tau_{11}=\frac{p_{32}}{p_{12}},\quad \tau_{12}=\frac{p_{42}}{p_{12}},$$

$$\text{»}\quad v_2:\quad 0,\ 1,\qquad \tau_{21}=\frac{p_{13}}{p_{12}},\quad \tau_{22}=\frac{p_{14}}{p_{12}},$$

et en conséquence $\tau_{21}=\tau_{12}$.

Soit:

$$\vartheta_{rs}(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

une des dix fonctions thêta paires; et ϑ_{rs} la même fonction dans laquelle on a supposé $v_1=v_2=0$.

On sait qu'en indiquant par ρ la quantité:

$$\rho=\frac{(2\pi i)^2}{p_{12}},$$

le produit $\rho^2\vartheta_{rs}^4$ est une fonction des racines de l'équation $f(z_1, z_2)=0$, fonction qu'on obtient en substituant ces racines dans l'expression c_{rs}^4 aux racines $\omega_0, \omega_1, \ldots$ de l'équation $u(x_1, x_2)=0$.

Si en conséquence on pose:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \rho^2[2\vartheta_5^4-\vartheta_0^4-\vartheta_{12}^4-\vartheta_{34}^4],\\
\varphi_1 &= \rho^2[2\vartheta_0^4-\vartheta_{12}^4-\vartheta_{34}^4-\vartheta_5^4],\\
\varphi_4 &= \rho^2[2\vartheta_{12}^4-\vartheta_{34}^4-\vartheta_5^4-\vartheta_0^4],\\
\varphi_2 &= \rho^2[2\vartheta_{34}^4-\vartheta_5^4-\vartheta_0^4-\vartheta_{12}^4],\\
\varphi_3 &= \rho^2[2\vartheta_5^4-\vartheta_{23}^4-\vartheta_4^4-\vartheta_{01}^4],\\
\varphi_5 &= \rho^2[2\vartheta_5^4-\vartheta_{14}^4-\vartheta_{03}^4-\vartheta_2^4],
\end{aligned}$$

[1] J'ai adopté la notation due au Prof[r] KLEIN. Voir dans les Math. Annalen, Bd. 27, *Über hyperelliptische Sigmafunctionen.*

l'équation du sixième degré dont les racines sont $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_5$, aura la même forme que les équations (A) ou (D), et l'on aura:

$$[\varphi^3 + 4\cdot 5\cdot 3^3.B\varphi + 4^2.5\cdot 3^3.C]^2 + 3^5[\varphi + 5\cdot 6.A]D = 0,$$

dans laquelle A, B, C, D sont pour la forme $f(z_1, z_2)$ les mêmes invariants qu'étaient a, b, c, δ pour la forme $u(x_1, x_2)$.

Déterminons maintenant la valeur de ces invariants A, B, C, D par les équations:

$$A = l, \qquad B = m, \qquad C = n, \qquad D = p,$$

on aura comme conséquence:

$$\sigma_r = \varphi_r,$$

c'est à dire les racines de l'équation (D) en σ, laquelle est une transformée de l'équation générale du sixième degré $u(x_1, x_2) = 0$, s'expriment par des fonctions théta dans lesquelles la valeur des périodes est déterminée par les relations supérieures entre les invariants.

Mais à cause des équations (E) on voit que, étant $\sigma_r = \varphi_r$, on aura aussi:

$$h_{rs}^4 = \rho^2\vartheta_{rs}^4,$$

et en conséquence on peut déterminer la valeur des racines $v_0, v_1, \ldots$ de l'équation (C) en fonctions explicites des fonctions théta.

2. Pour atteindre ce résultat il faut se rappeler les valeurs (1) de $a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3$. On sait que chacune des quinze expressions:

$$(y_r - y_s)(y_{r_1} - y_{s_1})(y_{r_2} - y_{s_2})$$

dont se composent ces valeurs sont des fonctions des h_{rs} et l'on a, par exemple,

$$(y_0 - y_1)(y_2 - y_3)(y_4 - y_5) = \frac{h_0^2 h_2^2 h_{03}^2 h_{12}^2 h_{14}^2 h_{34}^2}{\Pi h}.$$

On trouve ainsi pour $v_0, v_1, \ldots$ les valeurs suivantes:

$$\frac{2\Pi\partial}{\rho}v_0 = \vartheta_0^4\,\vartheta_{12}^4\vartheta_{34}^4 - \vartheta_5^4[\vartheta_{12}^4\vartheta_{34}^4 + \vartheta_{34}^4\vartheta_0^4 + \vartheta_0^4\,\vartheta_{12}^4 - 2\vartheta_5^2\vartheta_0^2\,\vartheta_{12}^2\vartheta_{34}^2],$$

$$\frac{2\Pi\partial}{\rho}v_2 = \vartheta_0^4\,\vartheta_{14}^4\vartheta_{23}^4 - \vartheta_5^4[\vartheta_{14}^4\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{23}^4\vartheta_0^4 + \vartheta_0^4\,\vartheta_{14}^4 - 2\vartheta_5^2\vartheta_0^2\,\vartheta_{14}^2\vartheta_{23}^2],$$

$$\frac{2\Pi\partial}{\rho}v_4 = \vartheta_{12}^4\vartheta_4^4\,\vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^4[\vartheta_4^4\,\vartheta_{01}^4 + \vartheta_{01}^4\vartheta_{12}^4 + \vartheta_{12}^4\vartheta_4^4 - 2\vartheta_5^2\vartheta_{12}^2\vartheta_4^2\,\vartheta_{01}^2],$$

$$\frac{2\Pi\partial}{\rho}v_5 = \vartheta_{14}^4\vartheta_{03}^4\vartheta_2^4 - \vartheta_5^4[\vartheta_{03}^4\vartheta_2^4 + \vartheta_2^4\,\vartheta_{14}^4 + \vartheta_{14}^4\vartheta_{03}^4 - 2\vartheta_5^2\vartheta_{14}^2\vartheta_{03}^2\vartheta_2^2],$$

$$\frac{2\Pi\partial}{\rho}v_1 = \vartheta_{34}^4\vartheta_2^4\,\vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^4[\vartheta_2^4\,\vartheta_{01}^4 + \vartheta_{01}^4\vartheta_{34}^4 + \vartheta_{34}^4\vartheta_2^2 - 2\vartheta_5^2\vartheta_{34}^2\vartheta_2^2\,\vartheta_{01}^2],$$

$$\frac{2\Pi\partial}{\rho}v_3 = \vartheta_{23}^4\vartheta_4^4\,\vartheta_{01}^4 - \vartheta_5^4[\vartheta_4^4\,\vartheta_{01}^4 + \vartheta_{01}^4\vartheta_{23}^4 + \vartheta_{23}^4\vartheta_4^4 - 2\vartheta_5^2\vartheta_{23}^2\vartheta_4^2\,\vartheta_{01}^2].$$

En résumant: la méthode que j'ai suivie pour la résolution des équations du sixième ordre se compose de quatre recherches différentes. 1°. Etant donnée une équation quelconque du sixième degré $u(x_1, x_2) = 0$ on peut au moyen de certaines fonctions de ses racines, fonctions que j'ai indiquées par c_{rs}^4, déterminer des quantités à six valeurs $y_0, y_1, \ldots, y_5$, et les coefficients de l'équation dont les racines sont ces quantités ont la propriété d'être des invariants de la forme $u(x_1, x_2)$. 2°. J'ai démontré que d'autre part l'équation $u(x_1, x_2) = 0$ peut être directement transformée dans une autre (forme normale (C)) qui a la même propriété quant aux coefficients et la même forme que la précédente. Les racines de l'équation donnée $u(x_1, x_2) = 0$ sont des fonctions rationnelles des racines de cette dernière. 3°. Mais les racines de cette dernière sont des fonctions des $y_0, y_1, \ldots$ d'une forme spéciale qui rend possible d'exprimer la valeur de ces mêmes racines en fonction de certaines quantités h_{rs}^4 composées avec les $y_0, y_1, \ldots$ de la même manière que les c_{rs}^4 le sont avec les racines de l'équation donnée. 4°. Enfin, de la théorie des fonctions théta hyperelliptiques à deux variables on déduit qu'avec les dix fonctions paires $\vartheta_{rs}^4(0, 0)$ on peut former des quantités à six valeurs, et que l'équation qui a pour racines ces quantités est de la même forme que les équations précédentes, et ses coefficients sont des invariants de

la forme du sixième ordre $f(z_1, z_2)$ qui appartient aux intégrales normales hyperelliptiques. Ces invariants peuvent donc être déterminés de manière que cette dernière équation vienne à coïncider avec la transformée de l'équation donnée.

3. J'ai déduit l'équation (A) en y de la résolvante de MALFATTI, mais je dois ajouter que cette équation, ou plus précisément la correspondante pour les fonctions $\vartheta_{rs}(0, 0)$, se trouve dans un mémoire remarquable de M. le Dr MASCHKE, et que la calculation directe des invariants de la forme $f(z_1, z_2)$ par les fonctions $\vartheta_{rs}(0, 0)$ est due à M. le Dr BOLZA.[1] Peu de temps après la publication de ces mémoires, par la connaissance que j'avais depuis quelques années de la transformée en v de l'équation générale du sixième degré je me suis aperçu que de cette coïncidence de forme on pourrait déduire la résolution des équations du sixième degré; et j'ai communiqué ce résultat à mon savant ami M. le Profr KLEIN. Quelques jours après M. MASCHKE m'a envoyé une communication pour l'Académie des Lincei dans laquelle il était arrivé au même résultat par une transformation de TSCHIRNAUS.[2]

Je dois remercier M. MITTAG-LEFFLER qui, m'ayant déterminé à composer ce petit mémoire, m'a donné l'occasion de rendre plus claire et plus complète la méthode que j'ai suivie.

Milan, Août 1888.

---

[1] MASCHKE, *Über die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt'schen Moduln.* — BOLZA, *Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärform sechsten Grades durch die Nullwerthe der zugehörigen ϑ-Functionen,* Math. Annalen, Bd. 30.

[2] Rendiconti della R. accademia dei Lincei, Seduta del 4 marzo 1888, *La risoluzione della equazione del sesto grado,* Estratto di una lettera del Dr MASCHKE al Socio BRIOSCHI; *Osservazioni sulla precedente comunicazione* del Socio BRIOSCHI.

BEMERKUNGEN ZUR THEORIE DER MEHRFACH LINEÄR VERKNÜPFTEN FUNCTIONEN

VON

KARL HEUN
in MÜNCHEN.

Die folgenden Zeilen enthalten Zusätze sowie eine Berichtigung zu meinen Untersuchungen in Bd. **11**, pag. 97—118 dieser Zeitschrift. Die Hauptfrage, welche hier erledigt wird, ist diese: »Wann sind $p+1$ p-fach linear verknüpfte Functionen *gleichgruppig?*» Herr POINCARÉ hat sich eine nahe verwandte Frage in dem *Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes*, Acta Mathematica, Bd. **5**, gestellt und für $p=2$ ausführlich erörtert. Nur handelt es sich dort um Functionen derselben *Familie*, während ich Functionen derselben *Art* (genre) betrachte. Eine wesentliche Bedeutung hat dieser Unterschied nicht, da es sehr leicht ist von dem einen Falle auf den andern überzugehen. Was mich die Functionen *derselben Art* bevorzugen liess, war der Umstand, dass diese unmittelbar zu den Beziehungen führen, welche als eine Erweiterung der GAUSS'schen *relationes inter functiones contiguas* anzusehen sind. Gerade von hier aus eröffnen sich neue Gebiete für die specielle Functionentheorie. Man denke nur an die Art, wie GAUSS die Theorie der Γ-Function aus einer bestimmten *relatio inter functiones contiguas* hervorgehen lässt.

1. Die erzeugenden Substitutionen der p-fach linear verknüpften Functionen mit $i+1$ Verzweigungspunkten besitzen (cf. Acta Mathematica, Bd. **11**, pag. 116)

$$(p^2-1)(i-1) \text{ independente Coefficienten.}$$

Zu der entsprechenden Gruppe gehören unendlich viele Differentialgleichungen, die sich zunächst durch die Zahl der »individuellen» Parameter unterscheiden. Die Differentialgleichung, für welche diese Zahl gleich k ist, besitzt, abgesehen von den Verzweigungspunkten, welche wir jetzt als vorgegeben betrachten,

$$(p-1)(i+1)+(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1)-1\right\}+k$$

independente Parameter. Die letztere Zahl wird gleich $(p^2-1)(i-1)$, wenn

$$k=(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1)-1)\right\}$$

angenommen wird. Hieraus folgt

Theorem I. Einem Systeme von i erzeugenden linearen Substitutionen p^{ter} Ordnung entspricht eine Differentialgleichung derselben Ordnung, welche $i+1$ beliebige Verzweigungspunkte und ebensoviele »individuelle» als »characteristische» Parameter besitzt.

Nach dem Ansatz, welchen ich in N° 5 der erwähnten Abhandlung mitgetheilt habe, kann man ein System mit einer beliebigen Anzahl *beliebiger* »individueller» Parameter auf ein *bestimmtes* gleichsgruppiges Hauptsystem reduciren. Die aus Gleichung (9) [Bd. **11**, pag. 112] fliessenden Relationen sind hinreichend zur Bestimmung der Coefficienten in der Reductionsgleichung und der »characteristischen» Parameter des Hauptsystems. Man kan jedoch denselben Ansatz benutzen um ein System (z) mit h »individuellen» Parametern auf ein gleichgruppiges Hauptsystem (y) mit *beliebigen* »characteristischen» Parametern zu reduciren. Alsdann werden aber die h »individuellen» Parameter infolge der Gleichung (9) l. c.

$$(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1)-1\right\} \text{ Bedingungen}$$

unterworfen. Sie sind also vollständig bestimmt, wenn k gleich der Zahl der »characteristischen» Parameter wird. Dass die Bestimmungsgleichungen im Allgemeinen von einander unabhängig sind, folgt aus Theorem I. —

Dem System (y) ordne man nun $p + 1$ unter einander verschiedene aber mit (y) gleichgruppige Functionen $z^{(0)}, z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$ mit je

$$(p - 1)\left\{\frac{1}{2}p(i - 1) - 1\right\}[= \rho]$$

»individuellen» Parametern zu und bestimme die Coefficienten nach dem erwähnten Ansatze. Hierauf eliminire man aus den $p + 1$ Reductionsgleichungen die Function (y) und ihre Derivirten. Dann entsteht eine Relation von der Form

$$\text{(a)} \qquad H_0(x) \, . \, z^{(0)} + H_1(x) \, . \, z^{(1)} + \ldots + H_p(x) \, . \, z^{(p)} = 0,$$

worin die H bekannte ganze rationale Functionen bedeuten. Dass unter den (z) in der vorstehenden Gleichung auch (y) *einmal* vorkommen kann, ist selbstverständlich. Dies führt zu

Theorem II. Zwischen $p + 1$ p-fach lineär verknüpften Functionen können nur dann Beziehungen[1] bestehen, welche den Gauss'schen *relationes inter functiones contiguas* analog sind, wenn wenigstens p derselben ebensoviele, dem Werthe nach nicht willkürliche, »individuelle» als »characteristische» Parameter besitzen.

Ich bemerke hierzu noch, dass man zur wirklichen Aufstellung dieser Relationen am bequemsten von der Gleichung (II) [Acta Mathematica, Bd. **11**, pag. 105] ausgeht und dann analog wie in N° 5 l. c. verfährt. Wegen eines ausgeführten Beispiels vergl. man meine *Beiträge zur Theorie der Lamé'schen Functionen* [Math. Annalen, Bd. **32**]. In diesem Falle ist $p = 2$, $i = 3$ und $\rho = 1$.

2. Ein System (z) mit den »individuellen» Parametern $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ und dem Indicesschema

$$\left\{\begin{matrix} n_{11}, & n_{12}, & \ldots, & n_{1\,i+1} \\ n_{21}, & n_{22}, & \ldots, & n_{2\,i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_{p1}, & n_{p2}, & \ldots, & n_{p\,i+1} \end{matrix}\right\}$$

[1] Ausnahmefälle können nur dann eintreten, wenn die Verzweigungsindices *bestimmten* Bedingungen genügen.

soll auf ein gleichgruppiges Hauptsystem (y), für welches $D = -m$ ist, reducirt werden. Zugleich sollen aber auch die Coefficienten in der Differentialgleichung

$$(x-\tau_1)(x-\tau_2)\dots(x-\tau_k)\psi^p\frac{d^pz}{dx^p}+G_{p-1}\cdot\psi^{p-1}\frac{d z^{p-1}}{dx^{p-1}}+\dots+G_0\cdot z=0$$

vollständig bestimmt werden.

Der Ansatz in N° 4 [l. c. pag. 109—111] giebt

$$p(m+k+1)+\frac{1}{2}p(p+1)(i-1) \text{ Gleichungen,}$$

welche erfüllt sein müssen, weil (y) und (z) gleichgruppig sein sollen. Meine Behauptung (l. c., pag. 111), dass von diesen Gleichungen

$$(p-1)\left\{\frac{1}{2}(p-1)(i-1)-1\right\} \text{ Gleichungen}$$

eine Folge der übrigen seien, ist eine *unrichtige*. Sie sind vielmehr »im Allgemeinen» d. h. wenn nicht specielle Relationen für die Verzweigungsindices bestehen, alle von einander unabhängig. Hier von überzeugt man sich durch die folgenden Betrachtungen.

Als *vorgegebene* Grössen bei der Überführung von (z) auf (y) wollen wir zunächst ansehen

erstens die Verzweigungsindices der Functionen (y) und (z),

zweitens die k »individuellen» Parameter in (z).

Alsdann sind als *Unbekannte* zu betrachten

erstens die ρ »characteristischen» Parameter in (y)

zweitens $p(k+1)+\frac{1}{2}p(p+1)(i-1)$ Coefficienten in den Functionen $G_0, G_1, \dots, G_{p-1}$

drittens $p(m+1)-\frac{1}{2}p(p-1)(i-1)-1$ Constanten in der Reductionsgleichung.

Man erkennt, dass zur Bestimmung dieser Unbekannten die durch den Ansatz in N° 4 gelieferten $p(m+k+1)+\frac{1}{2}p(p+1)(i-1)$ Gleichungen genügen, *wenn* dieselben von einander unabhängig sind. Der Ansatz in N° 5 l. c. liefert aber ebenfalls das Resultat, dass die »characteristischen»

Parameter in (y) *bestimmt* sind, wenn die »individuellen» Parameter von (z) beliebig vorgegeben sind. Ein Widerspruch in den Ergebnissen beider Reductionsmethoden ist unmöglich, denn sie folgen *beide* aus dem Princip der Irreductibilität der Differentialgleichungen für (y) und (z). Folglich sind in der That die obigen Gleichungen von einander unabhängig.

Wir wollen nun als *Daten* ansehen

erstens die ρ »characteristischen» Parameter in (y)

zweitens $k - \rho$ »individuelle» Parameter in (z)

drittens die Zahl $D = -m$,

und als *Unbekannte*

erstens $p(k + 1) + \frac{1}{2}p(p + 1)(i - 1)$ Coefficienten in den Functionen

$G_0, G_1, \ldots, G_{p-1}$

zweitens ρ »individuelle» Parameter in (z)

drittens $p(m + 1) + \frac{1}{2}p(p + 1)(i - 1) - 1$ Constanten in der Reductionsgleichung.

Der Ansatz in N° 4 l. c. liefert wiederum die hinreichende Zahl von Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten.

Hiernach muss der Satz auf pag. 112 l. c. durch die folgenden ersetzt werden.

Theorem III. Ein mehrfach linear verknüpftes Functionensystem lässt sich stets auf ein Hauptsystem mit *vorgegebenen* »characteristischen» Parametern reduciren, doch werden hierbei ebensoviele »individuelle» Parameter des zu reducirenden Systems dem Werthe nach bestimmt, als das Hauptsystem »characteristische» Parameter besitzt.

Theorem IV. Ein p-fach linear verknüpftes Functionensystem mit einer beliebigen Anzahl beliebiger »individueller» Parameter lässt sich immer durch ein Hauptsystem und $p - 1$ successive Derivirte derselben linear und rational ausdrücken. Die »characteristischen» Parameter des Hauptsystems sind durch ein gewisses System simultaner algebraischer Gleichungen bestimmt.

Nachdem die Coefficienten in der Differentialgleichung für (z) vollständig bestimmt sind, könnte man fragen, welche derselben man als characteristische Parameter ansehen soll. Es ist jedoch nicht nothwendig diese naturgemäss unbestimmte Frage durch eine willkürliche Fest-

setzung zu entscheiden. Da man nemlich immer eine Gleichung von der Form

$$z = P_0 . y + P_1 . \psi . \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{p-1} . \psi^{p-1} . \frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}}$$

aufstellen kann, so ist (z) durch seine »individuellen» Parameter, die Zahl D und die »characteristischen» Parameter von (y) determinirt. Es erscheint mir daher am einfachsten entweder gar nicht von »characteristischen» Parametern des Systems (z) zu sprechen oder, wenn man es thut, diejenigen des Hauptsystems (y) zu verstehen.

3. In Rücksicht auf verwandte Untersuchungen anderer Mathematiker, welche die von mir als »individuelle Parameter» bezeichneten Grössen einfach »ausserwesentlich singuläre Punkte» nennen, sehe ich mich veranlasst meine abweichende Terminologie zu begründen. Zunächst führt, wie schon RIEMANN gezeigt hat, die natürliche Entwicklung der Theorie der mehrfach linear verknüpften Functionen unmittelbar auf die Differentialgleichung [Acta Mathematica, Bd. **11**, pag. 105]

$$G_p[k] . \psi^p \frac{d^p z}{dx^p} + G_{p-1} . \psi^{p-1} . \frac{d^{p-1} z}{dx^{p-1}} + \ldots + G_0 . z = 0.$$

Für $p = 2$ hat man also

$$G_2[k] \psi^2 . \frac{d^2 z}{dx^2} + G_1 . \psi . \frac{dz}{dx} + G_0 . z = 0.$$

Durch eine bekannte Substitution lässt sich diese Gleichung durch die einfachere

$$G_2[k] . \psi . \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + G_1 . \frac{d\zeta}{dx} + \overline{G}_0 . \zeta = 0$$

ersetzen. Diese Form resultirt nun allerdings aus der von Herrn FUCHS gewählten wenn k Verzweigungspunkte in ausserwesentlich singuläre Punkte degeneriren. Nimmt man jedoch $p = 3$ dann ist diese Überführung nicht mehr möglich, so lange die Gleichung $G_3[k] = 0$ nur lineäre Factoren besitzt.

Es ist auch bemerkenswerth, dass man bei dem von mir eingeschlagenen Weg gar nicht auf die Theorie der logarithmischen Integrale zu recurriren braucht, wenn man nur annimmt, dass die Fundamentalgleichung für (z) ungleiche Wurzeln hat.

Frankfurt a/M. 26. Mai 1888.

SCHERING'S BEWEIS DES RECIPROCITÄTS-SATZES

FÜR DIE QUADRATISCHEN RESTE[1]

DARGESTELLT MIT HÜLFE DES ZEICHENS $[x]$

VON

JACOB HACKS

in BONN.

Die verallgemeinerte characteristische Zahl für den Rest n und für den Modul m, wo n und m ungerade relative Primzahlen sind, wird (nach SCHERING) definiert als die Anzahl der in den $\frac{m-1}{2}$ Brüchen

$$\frac{1 \cdot n}{m}, \quad \frac{2 \cdot n}{m}, \quad \frac{3 \cdot n}{m}, \quad \ldots, \quad \frac{\frac{m-1}{2} \cdot n}{m}$$

vorkommenden absolut kleinsten negativen Reste. Nun ist offenbar, wenn $[x]$ die grösste in einer Zahl x enthaltene ganze Zahl bezeichnet,

$$\left[\frac{sn}{m} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{sn}{m}\right] = 1 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem der absolut kleinste Rest von $\frac{sn}{m}$ negativ oder positiv ist. Bezeichnet man also die oben definierte characteristische Zahl mit μ, so kommt

$$\mu = \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{sn}{m} + \frac{1}{2}\right] - \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{sn}{m}\right].$$

[1] Nachr. d. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen 1879, p. 217.

ν sei die characteristische Zahl für m in Bezug auf den Modul n, dann ist ebenso

$$\nu = \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n} + \frac{1}{2}\right] - \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n}\right];$$

es ergibt sich demnach mit Benutzung eines zuerst von GAUSS (Werke II, p. 5) bewiesenen Satzes

$$(1) \qquad \mu + \nu = \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{sn}{m} + \frac{1}{2}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n} + \frac{1}{2}\right] - \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}.$$

Nun ist

$$(2) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{sn}{m} + \frac{1}{2}\right] = \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n} + \frac{1}{2}\right],$$

wie sich auf folgende Weise zeigen lässt. Es ist nach dem auf solche Functionen, die mit wachsendem Argumente fortwährend wachsen, ausgedehnten DIRICHLET'schen Satze (Acta Mathematica, Bd. 10, p. 16 sqq.)

$$(3) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n} + \frac{1}{2}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{n(2s-1)}{2m}\right] = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2},$$

$$(4) \qquad \sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{sn}{m} + \frac{1}{2}\right] + \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{m(2s-1)}{2n}\right] = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}.$$

Ferner ist

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n} + \frac{1}{2}\right] = \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{2sm+n}{2n}\right]$$

$$= \left[\frac{\frac{n-1}{2} \cdot 2m + n}{2n}\right] + \left[\frac{\frac{n-3}{2} \cdot 2m + n}{2n}\right] + \ldots + \left[\frac{2 \cdot 2m + n}{2n}\right] + \left[\frac{2m+n}{2n}\right]$$

$$= \left[\frac{n(m+1)}{2n} - \frac{m}{2n}\right] + \left[\frac{n(m+1)}{2n} - \frac{3m}{2n}\right] + \ldots + \left[\frac{n(m+1)}{2n} - \frac{(n-2)m}{2n}\right]$$

$$= \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} - \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{m(2s-1)}{2n}\right].$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in (3) ergibt sich[1]

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{n(2s-1)}{2m}\right] = \sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{m(2s-1)}{2n}\right], \tag{5}$$

und hieraus in Verbindung mit (3) und (4) die Richtigkeit von (2).[2] (1) nimmt nunmehr folgende Gestalt an

$$\mu+\nu = 2\sum_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{sm}{n}+\frac{1}{2}\right] - \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2},$$

oder

$$\mu+\nu \equiv \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2} \pmod 2.$$

---

[1] Den Beweis der Gleichung (5) hat mir Herr SCHAFSTEIN in Bonn mitgeteilt.

[2] Ein anderer Beweis der Gleichung (2) findet sich bei BUSCHE, *Über eine Beweismethode in der Zahlentheorie,* Göttingen 1883.

ÜBER EIN SYSTEM
LINEARER PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

I. HORN
in REHBACH.

In den folgenden Blättern wird die Aufgabe in Angriff genommen, die Untersuchungen des Herrn FUCHS über das Verhalten der Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung der singulären Stellen (Crelles Journal, Bd. **66**) auf Differentialgleichungen mit mehreren Veränderlichen auszudehnen. Da die Arbeit RIEMANN's über die durch die GAUSS'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen (Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften 1857) das Vorbild für die allgemeine Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen abgegeben hat, so liegt die Frage nahe, ob eine Function zweier Veränderlichen x, y durch ihre Unstetigkeiten und ihre Verzweigungsweise in ähnlicher Weise definiert werden kann, wie es RIEMANN in der angeführten Abhandlung für eine Function einer Veränderlichen gethan hat. Diesen Weg hat Herr PICARD (Annales de l'École Normale 1881) eingeschlagen, indem er eine Function z von x und y durch folgende Bedingungen definierte: Die unendlich vieldeutige Function z besitzt drei linear unabhängige Zweige z_0, z_1, z_2, durch welche sich jeder Zweig als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten

$$z = c_0 z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2$$

ausdrücken lässt; sie verhält sich nur an denjenigen Stellen (x, y) singulär, welche einer der Gleichungen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad y = 1, \quad x = \infty, \quad y = \infty, \quad x = y$$

genügen. In der Umgebung der Stellen

$$1)\quad x = 0,\quad y = b;\qquad 2)\quad x = a,\quad y = 0;$$
$$3)\quad x = 1,\quad y = b;\qquad 4)\quad x = a,\quad y = 1;$$
$$5)\quad x = \infty,\quad y = b;\qquad 6)\quad x = a,\quad y = \infty;$$
$$7)\quad x = a,\quad y = a,$$

wo a und b beliebige Grössen mit Ausschluss von 0, 1, ∞ sind, sind je drei linear unabhängige Zweige von folgender Gestalt vorhanden

$$1)\quad \zeta_0',\ \zeta_1',\ x^{1+\beta'-\gamma}\zeta_2',$$
$$2)\quad {}'\zeta_0,\ {}'\zeta_1,\ y^{1+\beta-\gamma'}\,{}'\zeta_2,$$
$$3)\quad \zeta_0'',\ \zeta_1'',\ (x-1)^{\gamma-\alpha-\beta}\zeta_2'',$$
$$4)\quad {}''\zeta_0,\ {}''\zeta_1,\ (y-1)^{\gamma-\alpha-\beta'}\,{}''\zeta_2,$$
$$5)\quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}\zeta_0''',\ \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}\zeta_1''',\ \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}\zeta_2''',$$
$$6)\quad \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}{}'''\zeta_0,\ \left(\frac{1}{y}\right)^{\beta'}{}'''\zeta_1,\ \left(\frac{1}{y}\right)^{\beta'}{}'''\zeta_2,$$
$$7)\quad \zeta_0,\ \zeta_1,\ (x-y)^{1-\beta-\beta'}\zeta_2;$$

hierbei sind sämtliche ζ Potenzreihen und zwar bez. der folgenden Variablen

$$1)\quad x,\ y-b;\qquad 2)\quad x-a,\ y;$$
$$3)\quad x-1,\ y-b;\qquad 4)\quad x-a,\ y-1;$$
$$5)\quad \frac{1}{x},\ y-b;\qquad 6)\quad x-a,\ \frac{1}{y},$$
$$7)\quad x-a,\ y-b.$$

Herr PICARD zeigt, dass die so definierte Function, welche in eine der von Herrn POCHHAMMER (Crelles Journal, Bd. **71** u. **73**) behandelten hypergeometrischen Functionen übergeht, wenn man eine der beiden Variablen als constant annimmt, das allgemeine Integral eines gewissen Systems linearer partieller Differentialgleichungen bildet. Zu derselben

Function gelangte zuerst Herr APPELL (Comptes Rendus, 1er semestre 1880 und Liouvilles Journal 1882) durch Verallgemeinerung der GAUSS'schen hypergeometrischen Reihe; er zeigt, dass die Reihe

$$F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n \qquad (m, n = 0 \ldots \infty)$$

— es ist $(\alpha, m) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)$; $(\alpha, 0) = 1$ — welche für $|x| < 1$, $|y| < 1$ convergiert, den Differentialgleichungen

$$x(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{\partial z}{\partial x} - \beta y \frac{\partial z}{\partial y} - \alpha\beta z = 0,$$

$$x(1-y)\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + y(1-y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + [\gamma - (\alpha + \beta' + 1)y]\frac{\partial z}{\partial y} - \beta' x \frac{\partial z}{\partial x} - \alpha\beta' z = 0$$

genügt, in welche auch die von Herrn PICARD abgeleiteten Differentialgleichungen übergeführt werden können. Aus diesen beiden Differentialgleichungen wird eine dritte

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \beta' \frac{\partial z}{\partial x} - \beta \frac{\partial z}{\partial y}$$

abgeleitet, mit deren Hilfe man das System so umformt, dass man drei Differentialgleichungen

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

erhält, deren Coefficienten a, b, c rationale Functionen von x, y von solcher Beschaffenheit sind, dass das System der drei Differentialgleichungen drei linear unabhängige Integrale besitzt. Das Verhalten der Integrale des Differentialgleichungensystems der Reihe $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ ist bekannt, da dasselbe durch jene Function des Herrn PICARD integriert wird, die gerade durch ihr analytisches Verhalten definiert worden war. Will man aber auf dem von Herrn APPELL eingeschlagenen Weg weiter gehn, so hat man das Verhalten der aus der Potenzreihe $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$

entspringenden analytischen Function, die wir eine hypergeometrische Function nennen, aus dem obigen System linearer partieller Differentialgleichungen abzuleiten. Es bietet sich somit die Aufgabe dar, ein System linearer partieller Differentialgleichungen von der Form (A) mit drei linear unabhängigen Integralen in ähnlicher Weise zu integrieren, wie Herr Fuchs die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen behandelt hat. Da das System der Differentialgleichungen der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ einer besonderen Klasse von Differentialgleichungensystemen (A) angehört, nämlich derjenigen Klasse, welche den von Herrn Fuchs in §§ 4—6 seiner Arbeit (Bd. **66**) behandelten gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit lauter regulären Integralen analog ist, so wird im Folgenden auch nur diese Klasse von Systemen (A), die später genauer characterisiert werden wird, eine eingehendere Behandlung finden. Herr Fuchs untersucht in § 3 seiner Abhandlung (Bd. **66**) das Verhalten der Integrale einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung bei einem Umlaufe der unabhängigen Variablen x um einen singulären Punkt; um bei der Integration des Differentialgleichungensystems (A) ähnlich verfahren zu können, dehnen wir im ersten Abschnitt den Begriff des Umlaufs um einen singulären Punkt auf mehrdeutige Functionen zweier Veränderlichen aus. Da unser Differentialgleichungensystem auf ein System totaler linearer Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann — setzt man nämlich

$$z_0 = z, \qquad z_1 = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad z_2 = \frac{\partial z}{\partial y},$$

so geht das System (A) über in

$$dz_0 = z_1 dx + z_2 dy,$$

$$dz_1 = (a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2)dx + (b_0 z_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2)dy,$$

$$dz_2 = (b_0 z_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2)dx + (c_0 z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2)dy$$

— so beschäftigen wir uns im zweiten Abschnitt mit den Systemen totaler linearer Differentialgleichungen

$$\text{(B)} \qquad dz_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} z_\beta \,.\, dx + \sum_\beta b_{\alpha\beta} z_\beta \,.\, dy, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

worin $a_{\alpha\beta}$ und $b_{\alpha\beta}$ rationale Functionen von x, y sind, welche die Inte-

grabilitätsbedingungen erfüllen. Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns im dritten Abschnitt zu dem System (A), wobei wir vorzugsweise einen Fall behandeln, in welchem sich sämtliche Integrale regulär verhalten. Als Anwendung geben wir die Integration des Differentialgleichungensystemes der Reihe $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$, wodurch wir auf einem andern Wege zu den anfangs gegebenen Resultaten des Herrn Picard gelangen. Beiläufig sei erwähnt, dass die *fonctions hyperfuchsiennes* des Herrn Picard (Acta Math., Bd. **1**, **2**, **5**) zu dem Differentialgleichungensystem (A) in ähnlicher Beziehung stehen, wie die Functionen einer Variablen mit eindeutigen Transformationen in sich zu einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung — ein Umstand, der ebenfalls die Integration des Systems (A) nahe legt. Der vierte Abschnitt endlich enthält einige Andeutungen über die Verallgemeinerung der in den drei ersten Abschnitten gegebenen Entwicklungen.

I.

Die Art der Fortsetzung einer mehrdeutigen Function zweier Veränderlichen $F(x, y)$ von einer Stelle $(x = a, y = b)$ zur Stelle $(x = a', y = b')$ kann durch eine einfach unendliche continuierliche Reihe von Stellen (x, y), welche die Punkte (a, b) und (a', b') verbindet — durch einen die Punkte (a, b) und (a', b') verbindenden Weg — bestimmt werden. Wir untersuchen das Verhalten der mehrdeutigen Function $F(x, y)$ auf solchen geschlossenen Wegen, die in der Umgebung einer singulären Stelle verlaufen. Unsere Function möge sich singulär verhalten an allen Nullstellen der irreductiblen ganzen Function $\phi(x, y)$; das irreductible — und daher monogene — algebraische Gebilde

$$\phi(x, y) = 0$$

werde als singuläres Gebilde oder als singuläre Curve der Function $F(x, y)$ bezeichnet. Wenn nicht sämtliche in der Umgebung der Stellen der singulären Curve verlaufenden geschlossenen Wege jeden Functionswert in sich selbst zurückführen, wird die singuläre Curve eine Verzweigungs-

curve genannt. Die Functionen, welche uns künftig beschäftigen werden, haben eine endliche Anzahl algebraischer Curven zu Verzweigungscurven.

Wir suchen nun diejenigen in der Umgebung der Stelle $(x = a, y = b)$ der Verzweigungscurve $\psi(x, y) = 0$ verlaufenden geschlossenen Wege, welche jeden Wert der Function $F(x, y)$ in sich selbst überführen. Es sei

$$\psi(x, y) = A(x - a) + B(y - b) + \ldots;$$

A und B sollen nicht beide verschwinden, so dass (a, b) ein einfacher Punkt der Curve $\psi(x, y) = 0$ ist. Durch die Substitution

$$u = \varphi(x, y),$$

$$v = \psi(x, y),$$

wobei $\varphi(x, y)$ eine derartig gewählte Potenzreihe von $x - a, y - b$ ist, dass die Determinante

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

für $x = a, y = b$ nicht verschwindet, wird

$$F(x, y) = G(u, v),$$

wo $G(u, v)$ eine Function ist, welche sich in der Umgebung der Stelle $(u = 0, v = 0)$ nur an denjenigen Stellen, für welche $v = 0$ ist, singulär verhält. Die obigen Substitutionsgleichungen ergeben

$$x - a = f(u, v),$$

$$y - b = g(u, v),$$

wo $f(u, v), g(u, v)$ an der Stelle $(u = 0, v = 0)$ verschwindende Potenzreihen von u, v sind. Ist (x', y') eine Stelle in hinreichender Nähe von (a, b) und entspricht dem Wertsystem $(x = x', y = y')$ das Wertsystem $(u = u', v = v')$, so lassen sich $x - x', y - y'$ als Potenzreihen von $u - u'$, $v - v'$ darstellen. Da, wenn (x', y') als reguläre Stelle der Function $F(x, y)$ vorausgesetzt wird, jeder Zweig dieser Function in der Umgebung von (x', y') in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, so sind auch sämtliche Zweige der Function $G(u, v)$ in Potenzreihen von $u - u', v - v'$ entwickelbar. Da die Stelle (x', y') nur der Beschränkung unterliegt,

dass sie nicht der Gleichung $\psi(x, y) = 0$ genügen darf, so verhält sich $G(u, v)$ regulär an allen einer gewissen Umgebung von $(u = 0, v = 0)$ angehörigen Stellen, für welche nicht $v = 0$ ist. Für Functionen einer einzigen Veränderlichen gilt nun der Satz, dass ein geschlossener Weg, der keine singuläre Stelle umschliesst, jeden Functionswert in sich zurückführt. In ähnlicher Weise beweist man für Functionen mehrerer Variablen den folgenden Satz: Ein geschlossener Weg im Gebiete der beiden Variablen x, y führt jeden Zweig der Function $F(x, y)$ in sich selbst zurück, wenn sich die Function regulär verhält an allen Stellen (x', y') von der Beschaffenheit, dass x' bez. y' von dem von der Variablen x bez. y in ihrer Ebene durchlaufenen Wege umschlossen wird. Da sich nun $G(u, v)$ in der Nähe von $(u = 0, v = 0)$ nur an den Stellen mit verschwindendem v singulär verhält, so erleidet die Function auf allen in einer gewissen Umgebung von $(u = 0, v = 0)$ verlaufenden geschlossenen Wegen von der Beschaffenheit, dass der von v beschriebene Weg den Nullpunkt der v-Ebene nicht einschliesst, keine Änderung. Überträgt man dies auf die Function $F(x, y)$, so erhält man den folgenden Satz:

»Die mehrdeutige analytische Function $F(x, y)$ besitze die singuläre Curve $\psi(x, y) = 0$, von welcher $(x = a, y = b)$ eine einfache Stelle sei. Setzt man irgend eines der Functionselemente, welche an der in einer gewissen Umgebung von (a, b) liegenden Stelle (ξ, η) vorhanden sind, fort auf einem Wege, der ebenfalls in jener Umgebung verläuft und wieder in (ξ, η) endigt, so erhält man hier wieder das ursprüngliche Functionselement, vorausgesetzt, dass der durchlaufene geschlossene Weg so beschaffen ist, dass der Weg, den infolge dessen die complexe Grösse $\psi(x, y)$ in ihrer Ebene zurücklegt, den Nullpunkt nicht einschliesst«,

oder mit anderen Worten, dass sich das Argument der complexen Grösse nicht ändert — unter dem Argument der complexen Zahl $a = |a| . e^{i\varphi}$ ist die Grösse φ verstanden. Unter Anwendung der Bezeichung:

»Ein geschlossener Weg umwindet die Curve $\psi(x, y) = 0$ λ-fach in positivem Sinne, wenn beim Durchlaufen dieses Weges das Argument der complexen Grösse $\psi(x, y)$ um $\lambda . 2\pi i$ wächst«

nimmt der obige Satz einen ähnlichen Ausdruck an, wie der entsprechende Satz für Functionen einer einzigen Veränderlichen:

»Durch einen in der Umgebung einer einfachen Stelle (a, b) der

singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ verlaufenden geschlossenen Weg, der die Curve $\psi(x, y) = 0$ nicht umwindet, wird jedes Element der mehrdeutigen analytischen Function in sich selbst zurückgeführt.»

Zwei in der Umgebung von (a, b) verlaufende, von einer Stelle ausgehende und wieder dahin zurückführende Wege, welche die singuläre Curve $\psi(x, y) = 0$ gleich viel mal umwinden, führen ein Element der mehrdeutigen Function möglicherweise in ein anderes, aber jedenfalls in dasselbe andere Element über; wir nennen zwei solche Wege äquivalent. Ein Weg, welcher die Curve $\psi(x, y) = 0$ in der Nähe der Stelle (a, b) umwindet, lässt sich leicht angeben. Ist

$$\psi(x, y) = A(x - a) + B(y - b) + \dots$$

und verschwinden A und B nicht gleichzeitig, so setzt man

$$x = a + \alpha t, \qquad y = b + \beta t,$$

wo α, β nicht die Gleichung

$$A\alpha + B\beta = 0$$

befriedigen. Dadurch wird

$$\psi(x, y) = ct + c't^2 + \dots;$$

diese Potenzreihe besitzt innerhalb einer gewissen Umgebung von $t = 0$ ausser $t = 0$ keine Nullstellen. Vollzieht die Variable t im Innern jener Umgebung irgend einen Umlauf um die Stelle $t = 0$, so umwindet der diesem Wege der Variablen t in Folge der Gleichungen $x = a + \alpha t$, $y = b + \beta t$ entsprechende Weg der Stelle (x, y) die Curve $\psi(x, y) = 0$ und zwar einfach, weil $c = A\alpha + B\beta$ von Null verschieden ist.

Unter (a, b) sei nun ein μ-facher Punkt der Curve $\psi(x, y) = 0$ verstanden, so dass die Entwicklung von $\psi(x, y)$ mit Gliedern μ^{ter} Dimension in $x - a, y - b$ beginnt:

$$\psi(x, y) = (x - a, y - b)_\mu + \dots.$$

Durch die Substitution

$$u = \varphi(x, y),$$
$$v = \psi(x, y)$$

geht $F(x, y)$ in eine Function $G(u, v)$ über, welche ausser der singulären Linie $v = 0$ in der Umgebung der Stelle $(u = 0, v = 0)$ noch andere Singularitäten besitzt, da sich jetzt $x - a$, $y - b$ nicht mehr als Potenzreihen von u, v darstellen lassen. Die Function $G(u, v)$ ist aber, wenn man von der singulären Linie $v = 0$ absieht, in der Nähe von $(u = 0, v = 0)$ ebenso verzweigt, wie x, y als Functionen von u, v. Ein in der Nähe von $(u = 0, v = 0)$ im Gebiete der Variablen (u, v) beschriebener geschlossener Weg, der x und y zu ihren Anfangswerten zurückführt, führt auch wieder zu dem ursprünglichen Werte der Function $G(u, v)$, falls die Variable v den Nullpunkt ihrer Ebene nicht umwindet.

Der oben ausgesprochene Satz gilt auch für den Fall, dass (a, b) ein mehrfacher Punkt der Curve $\phi(x, y) = 0$ ist.

Setzt man aber

$$x = a + \alpha t, \qquad y = b + \beta t,$$

wobei $(\alpha, \beta)_\mu$ nicht gleich 0 ist, so stellt der Weg, welchen die Stelle (x, y) beschreibt, wenn die Variable t den Punkt $t = 0$ umwindet, nicht wie früher eine einfache, sondern eine μ-fache Umwindung der singulären Curve dar. Dieselben Sätze gelten auch in der Umgebung der Stellen einer unendlich fernen Linie $x = \infty$ oder $y = \infty$, da sich jede solche Stelle in eine im Endlichen gelegene Stelle transformieren lässt.

Unter der Umgebung einer Stelle (a, b) der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ wird im Folgenden der Giltigkeitsbereich des oben abgeleiteten Satzes verstanden. Ist nun (a', b') ein anderer Punkt derselben singulären Curve, welcher in der Umgebung von (a, b) liegt, so ist ein von einer in der Umgebung von (a, b) gelegenen Stelle (ξ, η) ausgehender Weg, der die singuläre Curve umwindet, einem folgendermassen gebildeten Wege äquivalent: man geht von (ξ, η) im Innern der Umgebungen der Stellen (a, b) und (a', b') nach einer in der Umgebung von (a', b') gelegenen Stelle (ξ', η'), vollzieht innerhalb der Umgebung von (a', b') einen Umlauf um die singuläre Curve und kehrt nun von (ξ', η') nach (ξ, η) auf demselben Wege zurück, welcher vorher in umgekehrter Richtung durchlaufen wurde. Denn jeder der beiden Wege ist dem folgenden Wege äquivalent: man geht von (ξ, η) auf dem nach (ξ', η') führenden Wege nur bis zu einer Stelle (ξ^0, η^0), die in der gemeinschaftlichen Umgebung von (a, b) und (a', b') liegt, beschreibt sodann in dieser gemeinschaftlichen Umgebung

einen geschlossenen Weg, der die singuläre Curve umwindet, und durchläuft nun den Weg, der vorher von (ξ, η) nach (ξ^0, η^0) geführt hatte, in umgekehrter Richtung.

Ist (a, b) eine Stelle der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$, welche zugleich der singulären Curve $\phi'(x, y) = 0$ angehört, so erkennt man durch Anwendung der Substitution

$$u = \phi(x, y), \qquad v = \phi'(x, y),$$

dass zwei in einer gewissen Umgebung von (a, b) verlaufende geschlossene Wege, welche die singuläre Curve $\phi(x, y) = 0$ gleich oft, die singuläre Curve $\phi'(x, y) = 0$ gar nicht umwinden, einander äquivalent sind. Der vorhin ausgesprochene Satz gilt mithin auch dann noch, wenn von den Stellen (a, b) und (a', b') die eine oder beide ausser $\phi(x, y) = 0$ noch einer anderen singulären Curve angehören, wenn nur die die Curve $\phi(x, y) = 0$ umwindenden Wege nicht zugleich noch eine andere singuläre Curve umwinden.

Da die ganze Function $\phi(x, y)$ als irreductibel vorausgesetzt ist, so ist das algebraische Gebilde $\phi(x, y) = 0$ monogen im Sinne des Herrn Weierstrass; mann kann daher irgend zwei Stellen (a, b) und (a', b') der Curve $\phi(x, y) = 0$ durch eine continuierliche Reihe von Stellen (x, y) dieser Curve verbinden; auf diesem Wege kann man eine endliche Anzahl von Stellen

$$(a, b), (x', y'), \ldots, (x^{(\rho)}, y^{(\rho)}), (a', b')$$

so annehmen, dass immer die folgende in der Umgebung der vorhergehenden liegt — das Wort »Umgebung» in dem oben gefassten Sinne verstanden. Durch Wiederholung der auf S. 121 angestellten Betrachtung (nach dem Vorhergehenden darf der die Stellen (a, b) und (a', b') verbindende, aus Stellen der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ gebildete Weg auch noch andere singuläre Curven durchschneiden) ergiebt sich der folgende Satz:

Ist (a, b) eine beliebige Stelle der *irreductiblen* (monogenen) singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ einer mehrdeutigen analytischen Function von x, y, so kann ein die singuläre Curve $\phi(x, y) = 0$ umwindender Weg, der von einer Stelle (ξ, η) in die Umgebung von (a, b) ausgeht und ganz in dieser Umgebung verläuft, ersetzt werden durch einen anderen Weg,

den man auf folgende Weise erhält: wenn (a', b') irgend eine andere Stelle der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ ist, so geht man — auf einem Wege, der sich aus den letzten Betrachtungen ergiebt — zu irgend einer Stelle (ξ', η') in der Umgebung von (a', b'), beschreibt innerhalb dieser Umgebung einen geschlossenen Weg, der die Curve $\phi(x, y) = 0$ umwindet, und kehrt schliesslich von (ξ', η') nach (ξ, η) zurück, indem man denselben Weg, der vorher von (ξ, η) nach (ξ', η') führte, in entgegengesetzter Richtung durchläuft.

Den Sinn dieses Satzes, der uns später von Wichtigkeit sein wird, kann man kurz so aussprechen:

»Eine mehrdeutige analytische Function zeigt in der Umgebung der verschiedenen Stellen derselben *irreductiblen* singulären Curve das nämliche Verhalten.»

Zu späterer Verwendung ist folgender Ausdruck des Satzes geeignet:

»(a, b) und (a', b') seien irgend zwei Stellen der *irreductiblen* singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ einer mehrdeutigen analytischen Function. In der Nähe der Stelle (a, b) seien unter andern die Functionselemente $z_1, \ldots, z_m$ vorhanden, welche durch einen Umlauf um die singuläre Curve übergehen in

$$\bar{z}_1 = \varphi_1(z_1, \ldots, z_m), \quad \ldots \quad, \quad \bar{z}_m = \varphi_m(z_1, \ldots, z_m).$$

Man kann die m Elemente $z_1, \ldots, z_m$ auf einem solchen Wege nach einer Stelle der Umgebung von (a', b') fortsetzen, dass man dort m Elemente $z'_1, \ldots, z'_m$ erhält, welche durch einen in der Umgebung von (a', b') vollzogenen Umlauf um die singuläre Curve in

$$\bar{z}'_1 = \varphi_1(z'_1, \ldots, z'_m), \quad \ldots \quad, \quad \bar{z}'_m = \varphi_m(z'_1, \ldots, z'_m)$$

übergeführt werden.»

Dass für Functionen von n Veränderlichen ganz analoge Sätze gelten, ist leicht ersichtlich. Es ist für die folgenden Anwendungen nicht erforderlich, auch solche geschlossenen Wege in Betracht zu ziehen, welche nicht in der Umgebung der Stellen einer singulären Curve verlaufen. Um von den gewonnenen Ergebnissen eine einfache Anwendung zu machen, untersuchen wir das Verhalten einer algebraischen Function von x, y in

der Umgebung der Stellen einer singulären Curve. Durch die algebraische Gleichung

$$G(x, y, z) = 0$$

wird z als algebraische Function von x, y definiert. Ist

$$G(x, y, z) = g_0(x, y) . z^m + g_1(x, y) . z^{m-1} + \dots,$$

so wird z an denjenigen Stellen (x, y), welche der Gleichung $g_0(x, y) = 0$ genügen, unendlich. Enthält die ganze Function $g_0(x, y)$ den irreductiblen Factor $\varphi(x, y)$, so ist $\varphi(x, y) = 0$ eine singuläre Curve der algebraischen Function. Jede mehrfache Wurzel der Gleichung

$$G(x, y, z) = 0$$

genügt auch der Gleichung

$$\frac{\partial G(x, y, z)}{\partial z} = 0.$$

Bezeichnet man die Resultante von G und $\frac{\partial G}{\partial z}$ in Bezug auf z mit $R(x, y)$' so entspricht nur denjenigen Stellen (x, y), welche der Gleichung

$$R(x, y) = 0$$

genügen, eine mehrfache Wurzel z der algebraischen Gleichung. Ist $\psi(x, y)$ ein irreductibler Factor der ganzen Function $R(x, y)$, so ist $\psi(x, y) = 0$ eine singuläre Curve und zwar im allgemeinen eine Verzweigungscurve der algebraischen Function. Dass an jeder Stelle (ξ, η), welche keiner singulären Curve $\varphi(x, y) = 0$ und keiner Verzweigungscurve $\psi(x, y) = 0$ angehört, m Elemente der algebraischen Function z vorhanden sind, welche sich in Potenzreihen von $x - \xi, y - \eta$ entwickeln lassen, ist bekannt. Ist $\varphi(x, y) = 0$ eine singuläre Curve, die nicht zugleich Verzweigungscurve ist, und ist $g_0(x, y)$ durch $\varphi(x, y)^\lambda$ teilbar, so ist

$$\zeta = \varphi(x, y)^\lambda z$$

eine algebraische Function, die an einer Stelle (a, b) von $\varphi(x, y) = 0$ nicht mehr unendlich wird, also als Potenzreihe von $x - a, y - b$ darstellbar ist. Mithin gilt für einen Zweig der Function z die Entwicklung

$$z = \frac{\mathfrak{P}(x - a, y - b)}{\varphi(x, y)^\lambda}.$$

Ohne auf diesen Fall näher einzugehen, nehmen wir nun an, es sei $\phi(x, y) = 0$ eine Verzweigungscurve, aber nicht zugleich $\phi(x, y)$ ein Factor von $g_0(x, y)$. Wir setzen voraus, dass für alle Stellen (x, y) von $\phi(x, y) = 0$ die p Gleichungen

$$G(x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial G(x, y, z)}{\partial z} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{p-1} G(x, y, z)}{\partial z^{p-1}} = 0$$

eine gemeinschaftliche Wurzel z besitzen, dass also für jede dieser Stellen p Functionswerte zusammenfallen. Diese Voraussetzung lässt sich genauer folgendermassen ausdrücken:

Wendet man auf

$$G(x, y, z) \quad \text{und} \quad G'(x, y, z) = \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial z},$$

als Functionen von z betrachtet, das Verfahren zur Auffindung des gemeinschaftlichen Teilers an, so erhält man sie dargestellt in der Form

$$G(x, y, z) = g(x, y, z)[z - \mathfrak{g}(x, y)] + \mathfrak{R}(x, y),$$

$$G'(x, y, z) = g'(x, y, z)[z - \mathfrak{g}(x, y)] + \mathfrak{R}(x, y).$$

wo $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{g}$, g, g' rationale Functionen von x, y, g und g' ganze Functionen von z sind. Der Zähler der rationalen Function $\mathfrak{R}(x, y)$ ist die Resultante $R(x, y)$. Setzt man in den beiden Identitäten

$$z = \mathfrak{g}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\sigma(x, y)}$$

und entfernt die Nenner, so ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(x, y)^m G[x, y, \mathfrak{g}(x, y)] \equiv 0 \\ \sigma(x, y)^{m-1} G[x, y, \mathfrak{g}(x, y)] \equiv 0 \end{array}\right\} \bmod \phi(x, y).$$

Nach der gemachten Voraussetzung ist, wenn man

$$G^{(\alpha)}(x, y, z) = \frac{\partial^\alpha G(x, y, z)}{\partial z^\alpha}$$

setzt,

$$\sigma(x, y)^{m-\alpha} G^{(\alpha)}[x, y, \mathfrak{g}(x, y)] \equiv 0, \ \text{mod}\ \psi(x, y). \qquad (\alpha=0,1,\ldots,p-1)$$

Genügt die Stelle (x, y) der Gleichung $\psi(x, y) = 0$, so ist diesen p Congruenzen zufolge $z = \mathfrak{g}(x, y)$ eine p-fache Wurzel von $G(x, y, z) = 0$. Es sei nun $x = a, y = b$ eine Stelle von $\psi(x, y) = 0$, die keiner andern singulären oder Verzweigungscurve angehört, und $z = c$ die zugehörige p-fache Wurzel von $G = 0$. Zu einer Stelle (x, y) in der Nähe von (a, b) gehören p Functionswerte $z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$, welche für $x = a, y = b$ in c übergehen. Beschreibt der Punkt (x, y) in der Nähe von (a, b) einen geschlossenen Weg, so nehmen $z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$ wieder ihre ursprünglichen Werte an, falls jener Weg die Curve $\psi(x, y) = 0$ nicht umwindet; andernfalls können sich jene p Werte unter einander vertauschen. Wie im Falle einer einzigen unabhängigen Veränderlichen lassen sich $z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$ in eine Anzahl Gruppen so zerlegen, dass sich die Elemente einer Gruppe bei einem Umlauf um $\psi(x, y) = 0$ cyklisch vertauschen.

Für die μ Elemente einer solchen cyklischen Gruppe lässt sich ein analytischer Ausdruck aufstellen. Jedes dieser μ Elemente bleibt ungeändert bei einer μ-fachen Umwindung von $\psi(x, y) = 0$, d. h. wenn $v = \psi(x, y)^{\frac{1}{\mu}}$ seinen ursprünglichen Wert wieder annimmt. Durch die Substitution

$$u = \varphi(x, y),$$

$$v = \psi(x, y)^{\frac{1}{\mu}},$$

wo $\varphi(x, y) = A'(x - a) + B'(y - b) + \ldots$ ist, geht z in eine Function von u, v über, die sich in der Umgebung der Stelle $(u = 0, v = 0)$ regulär verhält, also in eine Potenzreihe von u, v entwickeln lässt. Führt man wieder x und y ein, so erhält man jene μ Wurzeln dargestellt durch einen Ausdruck von der Gestalt

$$z - c = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \mathfrak{P}_\nu(x - a, y - b) \cdot \psi(x, y)^{\frac{\nu}{\mu}}.$$

In der Umgebung einer jeden andern Stelle der irreductiblen Curve $\psi(x, y) = 0$ ordnen sich die m Werte der algebraischen Function z in ganz derselben Weise in Gruppen an, wie dies aus dem Satze auf S. 123 folgt. Hat man eine Verzweigungscurve $\psi(x, y) = 0$, die zugleich Unendlichkeitscurve ist, so gilt in der Umgebung einer Stelle (a, b) dieser Curve eine Entwicklung von der Form

$$z = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \mathfrak{P}_\nu(x - a, y - b) \,.\, \psi(x, y)^{\frac{\nu}{\mu} - \lambda},$$

wie man durch Verbindung der auf eine Unendlichkeits- und eine Verzweigungscurve bezüglichen Entwicklungen erkennt.

Um zu finden, wie sich die p Werte $z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$ in der Nähe der Verzweigungscurve $\psi(x, y) = 0$ in Gruppen verteilen, setzt man

$$x = a + \alpha t, \qquad y = b + \beta t,$$

wo (a, b) irgend eine einfache Stelle von $\psi(x, y) = 0$ ist und

$$\alpha\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{a,b} + \beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{a,b}$$

nicht verschwindet. Dadurch geht die Gleichung

$$G(x, y, z) = 0$$

über in

$$g(t, z) = 0;$$

die p Werte der durch letztere Gleichung definierte Function z von t, welche für $t = 0$ gleich c werden, verteilen sich in der Nähe von $t = 0$ in derselben Weise in Gruppen, wie die Werte der durch erstere Gleichung definierten Function z von x, y in der Umgebung der Stellen der Verzweigungscurve $\psi(x, y) = 0$. Da man für eine algebraische Function einer Variablen die fragliche Gruppenverteilung durch das Puiseux'sche Verfahren ermitteln kann, so kennt man sie auch für die algebraische Function zweier Variablen. In ganz derselben Weise kann man eine algebraische Function von n Veränderlichen behandeln.

Zur weiteren Anwendung der entwickelten Sätze und zugleich zur

Vorbereitung auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen möge noch die Integration eines totalen rationalen Differentials gegeben werden.

Es seien

$$f(x, y), g(x, y)$$

rationale Functionen, welche die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

erfüllen; das von einer Stelle (ξ, η) zu einer andern (x, y) auf einem gewissen Wege erstreckte Integral

$$v = \int_{(\xi, \eta)}^{(x, y)} [f(x, y)dx + g(x, y)dy]$$

ist gleich dem Werte, den die durch das Differentialgleichungensystem

$$\frac{\partial v}{\partial x} = f(x, y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = g(x, y)$$

definierte Function v in (x, y) annimmt, wenn man sie, von (ξ, η) mit dem Werte 0 ausgehend, auf dem Integrationswege nach (x, y) fortsetzt. Enthalten die rationalen Functionen $f(x, y), g(x, y)$ im Nenner die irreductiblen ganzen Functionen

$$\phi_1(x, y), \ldots, \phi_m(x, y),$$

so besitzt die Function v die singulären Curven

$$\phi_1(x, y) = 0, \quad \ldots, \quad \phi_m(x, y) = 0.$$

Die oben bewiesenen Sätze nehmen im vorliegenden Falle folgende Gestalt an: Alle geschlossenen Integrationswege, welche in der Umgebung einer Stelle (a, b) der singulären Curve $\phi(x, y) = 0$ verlaufen und diese Curve gleich oft umwinden, sind äquivalent; insbesondere ist das Integral gleich Null, wenn der Integrationsweg die singuläre Curve nicht umwindet. Ferner sind zwei geschlossene Integrale, deren Integrationswege dieselbe *irreductible* singuläre Curve $\phi(x, y) = 0$ in der Umgebung zweier verschiedenen Stellen (a, b) und (a', b') umwinden, einander gleich.

Es sei

$$f(x, y) = \frac{\mathfrak{f}(x, y)}{\phi_1(x, y)^{\mu_1} \dots \phi_m(x, y)^{\mu_m}}$$

$$g(x, y) = \frac{\mathfrak{g}(x, y)}{\phi_1(x, y)^{\mu_1} \dots \phi_m(x, y)^{\mu_m}}.$$

Die Werte, welche unser Integral auf geschlossenen Wegen erhält, die je eine singuläre Curve $\phi_1(x, y) = 0, \dots, \phi_m(x, y) = 0$ umwinden, mögen mit

$$2\pi i A_1, \dots, 2\pi i A_m$$

bezeichnet werden; man könnte dieselben Perioden des Integrals nennen. Da die Function

$$A_1 \log \phi_1(x, y) + \dots + A_m \log \phi_m(x, y)$$

dieselben Perioden besitzt, so ist, wenn man

$$v = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha \log \phi_\alpha(x, y) + H(x, y)$$

setzt, $H(x, y)$ eine eindeutige und zwar eine rationale Function. Zur Berechnung von A_α wählen wir den Integrationsweg, welchen

$$x = a + a't, \qquad y = b + b't$$

beschreiben, wenn t den Nullpunkt umwindet; (a, b) ist eine beliebige einfache Stelle von $\phi_\alpha(x, y) = 0$;

$$a'\left(\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial x}\right)_{a,b} + b'\left(\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial y}\right)_{a,b}$$

ist ebenso wie

$$\phi_\beta(a, b), \qquad \beta = 1, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, m$$

von Null verschieden. Die angegebene Substitution liefert das Integral

$$\int F_\alpha(t)dt,$$

wo

$$F_\alpha(t) = \frac{a'\mathfrak{f}(a + a't, b + b't) + b'\mathfrak{g}(a + a't, b + b't)}{\prod_{\beta=1}^{m} \phi_\beta(a + a't, b + b't)^{\mu_\beta}}$$

eine rationale Function von t ist, die für $t = 0$ unendlich wird. Die Periode $2\pi i A_a$ ist gleich dem um $t = 0$ herum erstreckten Integral $\int F_a(t)dt$, also

$$A_a = [F_a(t)]_{\frac{1}{t}}.$$

Die rationale Function $H(x, y)$ hat die Form

$$H(x, y) = \frac{G(x, y)}{\psi_1(x, y)^{\mu_1 - 1} \dots \psi_m(x, y)^{\mu_m - 1}};$$

um die ganze Function $G(x, y)$ zu berechnen, setzt man die Ableitungen nach x bez. y der beiden Seiten der Gleichung

$$\int \frac{\mathfrak{f}(x, y)dx + \mathfrak{g}(x, y)dy}{\psi_1(x, y)^{\mu_1} \dots \psi_m(x, y)^{\mu_m}} =$$

$$A_1 \log \psi_1(x, y) + \dots + A_m \log \psi_m(x, y) + \frac{G(x, y)}{\psi_1(x, y)^{\mu_1 - 1} \dots \psi_m(x, y)^{\mu_m - 1}}$$

einander gleich:

$$\psi_1 \dots \psi_m \frac{\partial G}{\partial x} - G \sum_a (\mu_a - 1) \frac{\partial \psi_a}{\partial x} \psi_1 \dots \psi_{a-1} \psi_{a+1} \dots \psi_m$$

$$= \mathfrak{f} - \psi_1^{\mu_1 - 1} \dots \psi_m^{\mu_m - 1} \sum_a A_a \frac{\partial \psi_a}{\partial x} \psi_1 \dots \psi_{a-1} \psi_{a+1} \dots \psi_m,$$

$$\psi_1 \dots \psi_m \frac{\partial G}{\partial y} - G \sum_a (\mu_a - 1) \frac{\partial \psi_a}{\partial y} \psi_1 \dots \psi_{a-1} \psi_{a+1} \dots \psi_m$$

$$= \mathfrak{g} - \psi_1^{\mu_1 - 1} \dots \psi_m^{\mu_m - 1} \sum_a A_a \frac{\partial \psi_a}{\partial y} \psi_1 \dots \psi_{a-1} \psi_{a+1} \dots \psi_m.$$

Es sei

$$G(x, y) = \sum_\lambda G^{(\lambda)}(x, y),$$

wo $G^{(\lambda)}(x, y)$ eine homogene Function λ^{ten} Grades bedeutet, die also der Gleichung

$$x \frac{\partial G^{(\lambda)}}{\partial x} + y \frac{\partial G^{(\lambda)}}{\partial y} = \lambda G^{(\lambda)}$$

genügt. Durch Vergleichung der Glieder λ^{ter} Dimension in den beiden obigen Gleichungen ergeben sich Gleichungen von der Form

$$L^{(0)}\frac{\partial G^{(\lambda+1)}}{\partial x} + L^{(1)}\frac{\partial G^{(\lambda)}}{\partial x} + \ldots + L^{(\lambda)}\frac{\partial G^{(1)}}{\partial x} + M^{(0)}G^{(\lambda)} + \ldots + M^{(\lambda)}G^{(0)} = P^{(\lambda)},$$

$$L^{(0)}\frac{\partial G^{(\lambda+1)}}{\partial y} + L^{(1)}\frac{\partial G^{(\lambda)}}{\partial y} + \ldots + L^{(\lambda)}\frac{\partial G^{(1)}}{\partial y} + N^{(0)}G^{(\lambda)} + \ldots + N^{(\lambda)}G^{(0)} = Q^{(\lambda)},$$

wo L, M, N, P, Q ganze homogene Functionen von x, y sind, deren Grad durch den oberen Index angedeutet wird. Multipliziert man die beiden letzten Gleichungen mit x, bez. y und addiert sie, so ergiebt sich zur Berechnung der homogenen Teile der ganzen Function $G(x, y)$ die Recursionsformel

$$(\lambda + 1)L^{(0)}G^{(\lambda+1)} + \{\lambda L^{(1)} + M^{(0)}x + N^{(0)}y\}G^{(\lambda)} + \ldots$$
$$\ldots + \{L^{(\lambda)} + M^{(\lambda-1)}x + N^{(\lambda-1)}y\}G^{(1)} + \{M^{(\lambda)}x + N^{(\lambda)}y\}G^{(0)} = P^{(\lambda)}x + Q^{(\lambda)}y.$$

Wir sind nun auch im Stande, das System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y) . z, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y) . z$$

zu integrieren; es ist nämlich

$$z = e^{\int [f(x, y)dx + g(x, y)dy]} = \psi_1(x, y)^{A_1} \ldots \psi_m(x, y)^{A_m} e^{\frac{G(x, y)}{\psi_1(x, y)^{\mu_1 - 1} \ldots \psi_m(x, y)^{\mu_m - 1}}}.$$

II.

Da das System linearer partieller Differentialgleichungen (A), welches uns in der vorliegenden Arbeit beschäftigt, auf ein System totaler linearer Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann, so gehen wir im gegenwärtigen Abschnitt auf die Differentialgleichungensysteme der letzteren Art und zwar zunächst auf diejenigen mit einer einzigen unabhängigen Variablen ein. Durch das System der Differentialgleichungen

$$\text{(C)} \qquad \frac{dz_\alpha}{dt} = \sum_\beta A_{\alpha\beta} z_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

wo unter $A_{\alpha\beta}$ eine Function von t verstanden ist, werden $z_1, \ldots, z_m$ als Functionen von t definiert, über deren Verhalten wir den Arbeiten von Herrn SAUVAGE (Annales de l'École Normale, 1882, 1886) Folgendes entnehmen.

Ist $t = \tau$ eine beliebige Stelle, in deren Umgebung sich sämtliche Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ regulär verhalten, so wird das System (C) durch ein System von Potenzreihen

$$z_1 = \mathfrak{P}_1(t - \tau) \ , \quad \ldots \ , \quad z_m = \mathfrak{P}_m(t - \tau)$$

befriedigt, welche für $t = \tau$ die willkürlich vorgeschriebenen Werte

$$z_1 = c_1 \ , \quad \ldots \ , \quad z_m = c_m$$

annehmen. Eine Lösung $(z_1, \ldots, z_m)$ des Differentialgleichungensystems (C) kann also nur an den singulären Stellen der Functionen $A_{\alpha\beta}$ ein singuläres Verhalten zeigen; man nennt diese Stellen die singulären Punkte des Differentialgleichungensystems. Es lassen sich m Lösungen unseres Systems (C)

$$z_{1\beta}, \ldots, z_{m\beta} \qquad (\beta = 1, \ldots, m)$$

angeben, durch welche jede Lösung $(z_1, \ldots, z_m)$ in der Form

$$z_1 = C_1 z_{11} + \ldots + C_m z_{1m},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$z_m = C_1 z_{m1} + \ldots + C_m z_{mm}$$

ausgedrückt werden kann. Ein solches System von m Lösungen nennen wir ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungensystems. Durchläuft die unabhängige Variable t einen geschlossenen Weg, so gehen die Elemente $z_{\alpha\beta}$ eines Fundamentalsystems über in Functionen $\bar{z}_{\alpha\beta}$, welche sich in der folgenden Weise durch $z_{\alpha\beta}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{\alpha 1} &= C_{11} z_{\alpha 1} + \ldots + C_{1m} z_{\alpha m}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad (\alpha = 1, \ldots, m) \\ \bar{z}_{\alpha m} &= C_{m1} z_{\alpha 1} + \ldots + C_{mm} z_{\alpha m}; \end{aligned}$$

hierbei sind die C von α unabhängige Constanten, die nur durch den von der Variablen t beschriebenen Weg bedingt sind. Jedem singulären Punkt $t = c$ des Differentialgleichungensystems (C) entspricht ein Fundamentalsystem $z_{\alpha\beta}$, welches bei einem Umlauf um den singulären Punkt ein besonders einfaches Verhalten zeigt. Hat die Determinante

$$| C_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta} | \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

— $\delta_{\alpha\beta} = 1$, wenn $\alpha = \beta$ ist, sonst $= 0$ — lauter einfache Elementarteiler $s - C_1, \ldots, s - C_m$ (vergl. Weierstrass, Berliner Monatsberichte 1868), so geht das erwähnte einfache Fundamentalsystem $z_{\alpha\beta}$, welches das zu dem singulären Puncte $t = c$ gehörige Fundamentalsystem genannt wird, bei einem Umlauf um den singulären Punkt über in

$$\begin{aligned} \bar{z}_{11} &= C_1 z_{11}, \quad \ldots, \quad \bar{z}_{m1} = C_1 z_{m1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{z}_{1m} &= C_m z_{1m}, \quad \ldots, \quad \bar{z}_{mm} = C_m z_{mm}; \end{aligned}$$

wenn man

$$C_1 = e^{2\pi i \cdot r_1}, \quad \ldots, \quad C_m = e^{2\pi i \cdot r_m}$$

setzt, so gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} z_{11} &= (t - c)^{r_1} \zeta_{11}, \quad \ldots, \quad z_{m1} = (t - c)^{r_1} \zeta_{m1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{1m} &= (t - c)^{r_m} \zeta_{1m}, \quad \ldots, \quad z_{mm} = (t - c)^{r_m} \zeta_{mm}, \end{aligned}$$

wo $\zeta_{\alpha\beta}$ in der Umgebung von $t = c$ eindeutig und daher in eine nach positiven und negativen Potenzen von $t - c$ fortschreitende Reihe entwickelbar ist.

Weniger einfach gestaltet sich die Entwicklung, wenn die Determinante $| C_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta} |$ auch mehrfache Elementarteiler besitzt; ist $s - C$ ein p-facher Elementarteiler derselben, so enthält das zu dem singulären Punkte gehörige Fundamentalsystem eine Gruppe von p Lösungen

$$\begin{array}{c} z_{11}, \ldots, z_{m1}, \\ \cdots\cdots \\ z_{1p}, \ldots, z_{mp}, \end{array}$$

welche durch den Umlauf um $t = c$ übergeführt wird in

$$\begin{array}{c} \bar{z}_{11}, \ldots, \bar{z}_{m1}, \\ \cdots\cdots \\ \bar{z}_{1p}, \ldots, \bar{z}_{mp}, \end{array}$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{z}_{\alpha 1} &= C z_{\alpha 1}, \\ \bar{z}_{\alpha 2} &= C z_{\alpha 2} + z_{\alpha 1}, \\ &\cdots\cdots \\ \bar{z}_{\alpha p} &= C z_{\alpha p} + z_{\alpha, p-1}. \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

Für die in Rede stehenden p Lösungen besteht folgende Entwicklung

$$\begin{aligned} z_{\alpha 1} &= (t - c)^r \zeta_{\alpha 1}, \\ z_{\alpha 2} &= (t - c)^r \{ \zeta_{\alpha 2} + \zeta'_{\alpha 2} \log (t - c) \}, \\ &\cdots\cdots \\ z_{\alpha p} &= (t - c)^r \{ \zeta_{\alpha p} + \zeta'_{\alpha p} \log (t - c) + \ldots + \zeta^{(p-1)}_{\alpha p} [\log (t - c)]^{p-1} \}, \end{aligned}$$

wenn man

$$C = e^{2\pi i r}$$

setzt und unter sämtlichen ζ in der Umgebung von $t = c$ eindeutige Functionen versteht.

Von besonderem Interesse sind diejenigen Differentialgleichungensysteme, bei welchen in der Entwicklung des zu einem singulären Punkte $t = c$ gehörigen Fundamentalsystems sämtliche oben mit ζ bezeichneten Reihen bei geeigneter Wahl der Exponenten r nur positive Potenzen von $t - c$ enthalten, oder, wie man sich nach Herrn THOMÉ ausdrückt, bei welchen sich sämtliche Integrale in der Umgebung des singulären Punktes $= c$ regulär verhalten. Wir machen von dem folgenden Satze Gebrauch, dessen Beweis den Inhalt einer Arbeit von Herrn SAUVAGE (Annales de l'École Normale 1886) bildet:

»Das Differentialgleichungensystem

$$(C') \qquad \frac{dz_\alpha}{dt} = \sum_\beta t^{p_\alpha - p_\beta - 1} g_{\alpha\beta}(t) \,.\, z_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

worin $p_1, \ldots, p_m$ positive oder negative ganze Zahlen und die Coefficienten

$$g_{\alpha\beta}(t) = a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta} t + a''_{\alpha\beta} t^2 + \ldots$$

Potenzreihen von t sind, besitzt in der Umgebung des singulären Punktes $t = 0$ lauter reguläre Lösungen.»

Es ist für folgende Anwendungen erforderlich, auf die Form dieser regulären Lösungen genauer einzugehen. (Ich hatte sowohl den soeben angeführten Satz bewiesen, als auch alle in der vorliegenden Arbeit enthaltenen Entwicklungen bereits ausgeführt, als ich von der zuletzt citierten Arbeit von Herrn SAUVAGE Kenntniss erhielt. Da mir dieselbe jetzt nicht zugänglich ist, so ist es mir nicht möglich, im Folgenden genau an dieselbe anzuknüpfen.)

Wir beschäftigen uns zunächst mit einem Differentialgleichungensystem von der Form

$$(C'') \qquad t\frac{dv_\alpha}{dt} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta} t + \ldots) v_\beta, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

da das System (C') leicht auf die Form (C'') zurückgeführt werden kann. Soll dem System (C'') durch ein System von Potenzreihen

$$v_\alpha = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (v_\alpha)_\lambda t^\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

genügt werden, so müssen die Coefficienten $(v_\alpha)_\lambda$ den Gleichungen

$$\lambda(v_\alpha)_\lambda = \sum_\beta a_{\alpha\beta}(v_\beta)_\lambda + \sum_\beta \{a'_{\alpha\beta}(v_\beta)_{\lambda-1} + \dots + a^{(\lambda)}_{\alpha\beta}(v_\beta)_0\} \quad (\lambda = 0, 1, \dots \infty)$$

genügen. Setzt man $\lambda = 0$, so erhält man als notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Systems von Potenzreihen:

$$| a_{\alpha\beta} | = 0.$$

Setzt man

$$R(\lambda) = | a_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta} |,$$

und bezeichnet man die Unterdeterminanten dieser Determinante mit $R_{\alpha\beta}(\lambda)$, so wird

$$R(\lambda).(v_\alpha)_\lambda = \sum_\beta R_{\beta\alpha}(\lambda).\sum_\gamma [a'_{\beta\gamma}(v_\gamma)_{\lambda-1} + \dots + a^{(\lambda)}_{\beta\gamma}(v_\gamma)_0].$$

Ist die Determinante $| a_{\alpha\beta} |$ vom Range $m - \mu$, so lassen sich aus den Gleichungen

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta}(v_\beta)_0 = 0$$

$m - \mu$ der Grössen $(v_1)_0, \dots, (v_m)_0$ als lineare homogene Functionen der μ übrigen darstellen, oder mit anderen Worten, $(v_1)_0, \dots, (v_m)_0$ erscheinen als lineare homogene Functionen von μ willkürlichen Constanten $k_1, \dots, k_\mu$. Wenn $R(\lambda)$ für keinen ganzzahligen positiven Wert von λ verschwindet, so erhält man sämtliche Grössen $(v_\alpha)_\lambda$ als lineare homogene Functionen von $k_1, \dots, k_\mu$:

$$(v_\alpha)_\lambda = k_1(v'_\alpha)_\lambda + \dots + k_\mu(v^{(\mu)}_\alpha)_\lambda;$$

da die μ Reihen

$$v'_\alpha = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(v'_\alpha)_\lambda t^\lambda,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$v^{(\mu)}_\alpha = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(v^{(\mu)}_\alpha)_\lambda t^\lambda$$

in einer gewissen Umgebung von $t = 0$ convergieren (vergl. Sauvage, a. a. O.), so gilt der Satz: Ist die Determinante $| a_{\alpha\beta} |$ vom Range $m - \mu$

und verschwindet die Determinante $|a_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta}|$ für keinen ganzzahligen positiven Wert von λ, so wird das Differentialgleichungensystem

$$t\frac{dv_\alpha}{dt} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}t + \ldots)v_\beta$$

durch μ Systeme von Potenzreihen

$$v_{1\beta} = \mathfrak{P}_{1\beta}(t)\ ,\quad \ldots\ ,\quad v_{m\beta} = \mathfrak{P}_{m\beta}(t) \qquad (\beta=1,\ldots,\mu)$$

befriedigt.

Wir berechnen nun ein Fundamentalsystem des allgemeinen Differentialgleichungensystems (C''). Setzt man

$$v_\alpha = t^r\varphi_\alpha, \qquad (\alpha=1,\ldots,m)$$

so erhält man für φ_α die Differentialgleichungen

$$t\frac{d\varphi_\alpha}{dt} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta})\varphi_\beta + \ldots,$$

aus welchen Potenzreihen für $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ hervorgehen, falls r der Gleichung

$$D(r) = |a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta}| = 0$$

genügt. Hat diese Gleichung lauter einfache Wurzeln $r_1, \ldots, r_m$, von denen keine zwei eine ganzzahlige Differenz besitzen, so ergeben sich m Lösungen

$$\begin{array}{ccc} v_{11} = t^{r_1}\varphi_{11}\ , & \ldots\ , & v_{m1} = t^{r_1}\varphi_{m1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_{1m} = t^{r_m}\varphi_{1m}\ , & \ldots\ , & v_{mm} = t^{r_m}\varphi_{mm}, \end{array}$$

wo sämtliche φ Potenzreihen von t sind.

Es sei nun $r = r_0$ eine μ-fache Wurzel von $D(r) = 0$, und $r - r_0$ trete μ-mal als einfacher Elementarteiler der Determinante

$$|a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta}|$$

auf, d. h. die Determinante sei durch $(r - r_0)^\mu$, alle Unterdeterminanten $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch $(r - r_0)^{\mu-1}$ teilbar u. s. w., während nicht alle

Unterdeterminanten $(m-\mu)^{\text{ter}}$ Ordnung für $r = r_0$ verschwinden, so dass die Determinante

$$| a_{\alpha\beta} - r_0 \delta_{\alpha\beta} |$$

den Rang $m-\mu$ hat. Da somit dem Differentialgleichungensystem für $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ durch μ Systeme von Potenzreihen genügt wird, so besitzt das Differentialgleichungensystem für $v_1, \ldots, v_m$ μ Lösungen von der Form

$$v_\alpha = t^{r_0} \mathfrak{P}_\alpha(t). \qquad (\alpha=1,\ldots,m)$$

Wir haben also den Satz:

»Hat die Determinante

$$| a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta} |$$

lauter einfache Elementarteiler $r-r_1, \ldots, r-r_m$ (von denen auch mehrere einander gleich sein können), so besitzt das Differentialgleichungensystem

$$t\frac{dv_\alpha}{dt} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}t + \ldots)v_\beta \qquad (\alpha, \beta=1,\ldots,m)$$

in der Umgebung der singulären Stelle $t = 0$ ein Fundamentalsystem von der Gestalt

$$\begin{array}{lll} v_{11} = t^{r_1}\varphi_{11}, & \ldots, & v_{m1} = t^{r_1}\varphi_{m1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_{1m} = t^{r_m}\varphi_{1m}, & \ldots, & v_{mm} = t^{r_m}\varphi_{mm}, \end{array}$$

wo $\varphi_{11}, \ldots, \varphi_{mm}$ in Potenzreihen von t entwickelbar sind.»

Um auch den Fall, wo die Determinante $D(r)$ einen mehrfachen Elementarteiler $r-r_0$ besitzt, behandeln zu können, untersuchen wir zunächst das System

$$t\frac{dv_\alpha}{dt} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}t + \ldots)v_\beta$$

unter der Voraussetzung, dass $| a_{\alpha\beta} | = 0$ ist und dass die Determinante

$$D(\lambda) = | a_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta} |$$

den Elementarteiler λ^e besitzt. Es ist gleichgültig, ob noch andere Ele-

mentarteiler von der Form λ^e vorkommen oder nicht. Wir werden sehen, dass eine Lösung von der Form

$$v_\alpha = \sum_{\nu=0}^{e-1} v_\alpha^{(\nu)} (\log t)^{e-\nu-1}$$

existiert, wo $v_\alpha^{(\nu)}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, e-1$) Potenzreihen sind, die sich aus den Differentialgleichungen

$$t\frac{dv_\alpha^{(0)}}{dt} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(0)} + \ldots,$$

$$t\frac{dv_\alpha^{(1)}}{dt} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(1)} - (e-1) v_\alpha^{(0)} + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t\frac{dv_\alpha^{(\nu)}}{dt} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(\nu)} - (e-\nu) v_\alpha^{(\nu-1)} + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t\frac{dv_\alpha^{(e-1)}}{dt} = \sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(e-1)} - v_\alpha^{(e-2)} + \ldots$$

ergeben. Diese Differentialgleichungensysteme erhält man, wenn man den obigen Ausdruck für v_α in (C″) substituiert und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $\log t$ betrachtet. Damit diesen Differentialgleichungen durch Potenzreihen $v_\alpha^{(\nu)}$ genügt wird, ist, vorausgesetzt, dass $D(\lambda) = 0$ keine ganze positive Wurzel besitzt, notwendig und hinreichend, dass die Gleichungen

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(0)} = 0,$$

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(1)} = (e-1) v_\alpha^{(0)},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(\nu)} = (e-\nu) v_\alpha^{(\nu-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(e-1)} = v_\alpha^{(e-2)}$$

durch endliche, nicht sämtlich verschwindende Werthe von $v_\alpha^{(0)}, v_\alpha^{(1)}, \ldots, v_\alpha^{(e-1)}$ erfüllbar sind. Man erkennt dies sofort, wenn man die obigen e Differentialgleichungensysteme als ein einziges System mit den em Functionen $v_\alpha^{(\nu)}$ auffasst. Aus der Theorie der Transformation einer Schar bilinearer Formen in die Normalform (Weierstrass, Berliner Monatsberichte 1868) ergiebt sich Folgendes: Multipliciert man die Gleichung

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta} v_\beta^{(\nu)} = (e-\nu)\, v_\alpha^{(\nu-1)}$$

mit einer Unbestimmten u_α und summiert über $\alpha = 1, \ldots, m$, so erhält man die Gleichung

$$\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta^{(\nu)} = (e-\nu) \sum_\alpha u_\alpha v_\alpha^{(\nu-1)}.$$

Führt man statt der Variablen $u_1, \ldots, u_m$ vermittels einer bilinearen Substitution neue $U_1, \ldots, U_m$ und statt der $v_1^{(\nu)}, \ldots, v_m^{(\nu)}$ vermittels der Substitution

$$v_\alpha^{(\nu)} = \sum_\beta c_{\alpha\beta} v_\beta^{(\nu)} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, e-1)$$

eine neue Reihe $V_1^{(\nu)}, \ldots, V_m^{(\nu)}$ ein, so gehen die beiden bilinearen Formen

$$\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta^{(\nu)}, \quad \sum_\alpha u_\alpha v_\alpha^{(\nu-1)}$$

über in

$$(U_1 V_{e-1}^{(\nu)} + \cdots + U_{e-1} V_1^{(\nu)}) + \cdots, \quad (U_1 V_e^{(\nu-1)} + \cdots + U_e V_1^{(\nu-1)}) + \cdots,$$

es besteht also die Gleichung

$$U_1 V_{e-1}^{(\nu)} + \cdots + U_{e-1} V_1^{(\nu)} + \cdots = (e-\nu)(U_1 V_e^{(\nu-1)} + \cdots + U_e V_1^{(\nu-1)}) + \cdots;$$

setzt man die Coefficienten der verschiedenen U auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= V_1^{(\nu-1)}, \\ V_1^{(\nu)} &= (e-\nu) V_2^{(\nu-1)}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ V_{e-1}^{(\nu)} &= (e-\nu) V_e^{(\nu-1)}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, e-1)$$

welche dadurch befriedigt werden, dass man $V_e^{(0)}, V_e^{(1)}, \ldots, V_e^{(e-1)}$ willkürlich lässt, ferner

$$V_{e-1}^{(1)} = (e-1)V_e^{(0)}$$
$$V_{e-1}^{(2)} = (e-2)V_e^{(1)},\; V_{e-2}^{(2)} = (e-2)(e-1)V_e^{(0)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V_{e-1}^{(e-1)} = V_e^{(e-2)},\; V_{e-2}^{(e-1)} = (1\,,2)V_e^{(e-3)}, \ldots, V_1^{(e-1)} = (1\,,e-1)V_e^{(0)},$$

alle übrigen V gleich Null setzt. Die Functionen $V_a^{(0)}, V_a^{(1)}, \ldots V_a^{(e-1)}$ enthalten e willkürliche Constanten, nämlich die zu $t = 0$ gehörigen Werte von $V_1^{(0)}, V_1^{(1)}, \ldots, V_1^{(e-1)}$. Man erhält also auch für $v_a^{(0)}, v_a^{(1)}, \ldots, v_a^{(e-1)}$ Potenzreihen von t, welche e willkürliche Grössen linear enthalten; daher treten e dem Elementarteiler λ^e entsprechende linear unabhängige Lösungen von der Form

$$v_a = \sum_{\nu=0}^{e-1} v_a^{(\nu)}(\log t)^{e-\nu-1} \qquad (a=1,\ldots,m)$$

auf; giebt man den in den $v_a^{(\nu)}$ vorkommenden willkürlichen Constanten geeignete Werte, so erhält man e linear unabhängige Lösungen von der Gestalt

$$v_a = v_a^{(0)}$$
$$v_a = v_a^{(0)}\log t + v_a^{(1)}$$
$$\cdots\cdots$$

Hiernach kann man den folgenden Satz aussprechen:

»Die Wurzeln der Gleichung

$$D(r) = |\, a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta} \,| = 0$$

seien so beschaffen, dass keine zwei eine ganzzahlige (von Null verschiedene) Differenz besitzen. $r = r_0$ sei eine mehrfache Wurzel und $r - r_0$ ein e-facher Elementarteiler der Determinante $D(r)$. Dann besitzt das System der Differentialgleichungen

$$t\frac{dv_a}{dt} = \sum_\beta g_{a\beta}(t)\,.\,v_\beta \qquad (a,\beta=1,\ldots,m)$$
$$g_{a\beta}(0) = a_{a\beta}$$

e Lösungen von der Gestalt

$$v_\alpha = t^{r_0}\varphi_{\alpha 0},$$
$$v_\alpha = t^{r_0}\{\varphi_{\alpha 1} + \varphi'_{\alpha 1}\log t\},$$
$$v_\alpha = t^{r_0}\{\varphi_{\alpha 2} + \varphi'_{\alpha 2}\log t + \varphi''_{\alpha 2}(\log t)^2\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_\alpha = t^{r_0}\{\varphi_{\alpha,e-1} + \varphi'_{\alpha,e-1}\log t + \ldots + \varphi^{e-1}_{\alpha,e-1}(\log t)^{e-1}\},$$

wobei sämtliche φ Potenzreihen von t sind, zwischen denen ähnliche Relationen bestehen, wie im Falle der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen.»

Bevor wir den Fall behandeln, wo die Gleichung $|a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta}| = 0$ Wurzeln mit ganzzahliger Differenz besitzt, dehnen wir die bisher für das Differentialgleichungensystem (C″) gewonnenen Resultate auf das allgemeinere System

$$\text{C}') \qquad \frac{dz_\alpha}{dt} = \sum_\beta t^{p_\alpha - p_\beta - 1} g_{\alpha\beta}(t)\,.\,z_\beta$$

aus, welches durch die Substitution

$$z_\alpha = t^{p_\alpha} v_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

in

$$t\frac{dv_\alpha}{dt} = \sum_\beta [g_{\alpha\beta}(t) - \delta_{\alpha\beta}p_\alpha]v_\beta$$

übergeführt wird.

»Hat die Determinante

$$|a_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}(p_\alpha + r)|$$

lauter einfache Elementarteiler $r - r_1, \ldots, r - r_m$, so besitzt das System (C′) in der Umgebung des singulären Punktes $t = 0$ ein Fundamentalsystem von der Form

$$z_{11} = t^{r_1+p_1}\zeta_{11}, \ldots, z_{m1} = t^{r_1+p_m}\zeta_{m1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_{1m} = t^{r_m+p_1}\zeta_{1m}, \ldots, z_{mm} = t^{r_m+p_m}\zeta_{mm},$$

wo $\zeta_{11}, \ldots, \zeta_{mm}$ in Potenzreihen von t entwickelbar sind. Einem e-fachen Elementarteiler $(r - r_0)^e$ der Determinante

$$| a_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}(p_\alpha + r) |$$

entspricht eine Gruppe von e Lösungen des Systems (C′)

$$z_{1\beta} = t^{r_0 + p_1} u_{1\beta}, \ldots, z_{m\beta} = t^{r_0 + p_m} u_{m\beta}, \qquad (\beta = 1, \ldots, e)$$

wobei $u_{1\beta}, \ldots, u_{m\beta}$ Ausdrücke von der Form

$$\zeta + \zeta' \log t + \ldots + \zeta^{(\beta-1)} (\log t)^{\beta-1}$$

sind, unter $\zeta, \zeta', \ldots$ Potenzreihen von t verstanden.»

Die Gleichung

$$| a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta} | = 0$$

$$\text{bez. } | a_{\alpha\beta} - (p_\alpha + r)\delta_{\alpha\beta} | = 0$$

kann man die zu dem singulären Punkte $t = 0$ gehörige determinierende Gleichung des Systems (C″) bez. (C′) nennen.

Es bliebe nun noch der Fall zu behandeln, dass mehrere Wurzeln der determinierenden Gleichung des Systems (C′) oder (C″) um ganze Zahlen verschieden sind. Wir werden diesen Fall nicht erschöpfend behandeln, sondern nur so weit entwickeln, als es für die Anwendungen im nächsten Abschnitte erforderlich ist. Hat die determinierende Gleichung des Differentialgleichungensystems (C″) die beiden Wurzeln r_0 und $r_0 + e$, unter e eine ganze positive Zahl verstanden, und sind beide einfache Wurzeln, oder was auch schon hinreichend ist, $r - r_0$ und $r - (r_0 + e)$ einfache Elementarteiler der Determinante $| a_{\alpha\beta} - r\delta_{\alpha\beta} |$, so sind zwei Lösungen von folgender Form vorhanden

$$v_\alpha = t^{r_0 + e} \varphi_\alpha,$$
$$v'_\alpha = t^{r_0 + e} k \varphi_\alpha \log t + t^{r_0} \varphi'_\alpha,$$

wo φ_α und φ'_α Potenzreihen von t und k eine Constante ist. Tritt $r - (r_0 + e)$ μ mal, $r - r_0$ ν mal als einfacher Elementarteiler auf, so sind μ Lösungen von der Form v_α, ν Lösungen von der Form v'_α vorhanden. Ist $r - (r_0 + e)$

ein zweifacher, $r - r_0$ ein einfacher Elementarteiler, so sind drei Lösungen von folgender Form vorhanden

$$v_\alpha = t^{r_0+e}\varphi_\alpha,$$

$$v'_\alpha = t^{r_0+e}\{\varphi_\alpha \log t + \varphi'_\alpha\},$$

$$v''_\alpha = t^{r_0+e}\{\varphi_\alpha(\log t)^2 + k\varphi'_\alpha \log t\} + t^{r_0}\varphi''_\alpha;$$

ist dagegen $r - r_0$ ein zweifacher, $r - (r_0 + e)$ ein einfacher Elementarteiler, so haben wir drei Lösungen von der Gestalt:

$$v_\alpha = t^{r_0+e}\varphi_\alpha,$$

$$v'_\alpha = t^{r_0+e}\varphi_\alpha \log t + t^{r_0}\varphi'_\alpha,$$

$$v''_\alpha = t^{r_0+e}\varphi_\alpha(\log t)^2 + t^{r_0}\{k\varphi'_\alpha \log t + \varphi''_\alpha\}.$$

Diese Sätze ergeben sich teils von selbst, teils vermittels einiger weiterer Betrachtungen aus der Arbeit von Herrn Sauvage (Annales de l'École Normale 1886). Die analogen Sätze für das System (C′) sind leicht aus den angegebenen herzuleiten.

Es ist nun unter Zuhilfenahme der in Nr. I angestellten Betrachtungen nicht schwer, die vorstehenden Entwicklungen auf das Differentialgleichungensystem

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial z_\alpha}{\partial x} = \sum_\beta A_{\alpha\beta} z_\beta, \qquad \frac{\partial z_\alpha}{\partial y} = \sum_\beta B_{\alpha\beta} z_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

auszudehnen, worin $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ Functionen von x, y sind, welche den Integrabilitätsbedingungen Genüge leisten. Auf jedem im Gebiete der Variablen (x, y) verlaufenden geschlossenen Wege erfährt ein Fundamentalsystem des Systems (B) dieselbe Veränderung wie im Falle einer unabhängigen Veränderlichen, es geht nämlich

$$\begin{matrix} z_{11}, & \ldots, & z_{m1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ z_{1m}, & \ldots, & z_{mm} \end{matrix}$$

über in

$$\begin{matrix} \bar{z}_{11}, \dots, \bar{z}_{m1} \\ \dots\dots \\ \bar{z}_{1m}, \dots, \bar{z}_{mm}, \end{matrix}$$

wo

$$\begin{matrix} \bar{z}_{a1} = C_{11} z_{a1} + \dots + C_{1m} z_{am}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \bar{z}_{am} = C_{m1} z_{a1} + \dots + C_{mm} z_{am} \end{matrix} \qquad (a=1, \dots, m)$$

ist. Setzt man die Coefficienten $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ als rationale Functionen von x, y voraus, deren Nenner die irreductiblen Factoren $\varphi(x, y), \psi(x, y), \dots$ enthalten, so sind

$$\varphi(x, y) = 0. \qquad \psi(x, y) = 0, \dots$$

die singulären Curven des Systems (B). Während früher das Verhalten eines Fundamentalsystems bei einem Umlauf der unabhängigen Variablen t um einen singulären Punkt untersucht wurde, betrachten wir hier ein Fundamentalsystem, welches auf einem geschlossenen Wege, der eine singuläre Curve $\psi(x, y) = 0$ umwindet, ein besonders einfaches Verfahren zeigt. Aus den Entwicklungen des ersten Abschnitts ist ersichtlich, dass in der Umgebung einer jeden Stelle von $\psi(x, y) = 0$ ein Fundamentalsystem existiert, welches bei einer Umwindung der singulären Curve dasselbe Verhalten zeigt, gleichviel in der Umgebung welcher Stelle die Umwindung stattfindet. In den Ausdrücken, die für die Lösungen eines solchen Fundamentalsystems im Falle einer Variablen oben aufgestellt wurden, braucht man, um die Gestalt des zu der Stelle (a, b) der singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ gehörigen Fundamentalsystems zu erhalten, bloss $(t - c)^r$ durch $\psi(x, y)^r$, $\log(t - c)$ durch $\log \psi(x, y)$ zu ersetzen und unter den ζ Functionen von x, y zu verstehen, welche sich in der Umgebung der Stelle (a, b) eindeutig verhalten, möglicherweise aber an den Stellen der Curve $\psi(x, y) = 0$ unendlich werden. Die Functionen ζ lassen eine Darstellung von folgender Gestalt zu:

$$\zeta = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{P}_\lambda(x - a, y - b)}{\psi(x, y)^\lambda}.$$

Durch die Substitution

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y)$$

geht die Function ζ, welche in der Umgebung von (a, b) eindeutig ist und nur an den Stellen von $\psi(x, y) = 0$ unendlich wird, in eine Function von u, v über, welche in der Umgebung der Stelle $(u = 0, v = 0)$ eindeutig ist und nur unendlich wird, wenn $v = 0$ ist. Sie ist nach dem Laurent'schen Satze in der Form

$$\zeta = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} C_\lambda v^\lambda$$

darstellbar, wo C_λ in eine Potenzreihe von u entwickelbar ist. Führt man wieder x, y ein, so ergiebt sich die oben angegebene Form der Function ζ.

Von besonderem Interesse sind nun wieder diejenigen Differentialgleichungen, deren sämtliche Lösungen sich in der Umgebung der Stellen einer singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ regulär verhalten; in diesem Falle können die Exponenten r in der angedeuteten Entwicklung so gewählt werden, dass die Functionen ζ in Potenzreihen von $x - a, y - b$ entwickelbar sind. Ein Differentialgleichungensystem, dessen Lösungen die erwähnte Eigenschaft haben, ist z. B.

$$(\mathrm{B}') \qquad \begin{aligned} \psi(x, y)\frac{\partial z_\alpha}{\partial x} &= \sum_\beta f_{\alpha\beta}(x, y) \,.\, z_\beta, \\ \psi(x, y)\frac{\partial z_\alpha}{\partial y} &= \sum_\beta g_{\alpha\beta}(x, y) \,.\, z_\beta \end{aligned}$$

oder das allgemeinere

$$(\mathrm{B}'') \qquad \begin{aligned} \frac{\partial z_\alpha}{\partial x} &= \sum_\beta \psi(x, y)^{p_\alpha - p_\beta - 1} f_{\alpha\beta}(x, y) \,.\, z_\beta, \\ \frac{\partial z_\alpha}{\partial y} &= \sum_\beta \psi(x, y)^{p_\alpha - p_\beta - 1} g_{\alpha\beta}(x, y) \,.\, z_\beta, \end{aligned}$$

wo $p_1, \ldots, p_m$ positive oder negative ganze Zahlen sind, $f_{\alpha\beta}(x, y)$ und $g_{\alpha\beta}(x, y)$ Potenzreihen von $x - a, y - b$, welche den Integrabilitätsbedingungen Genüge leisten — unter (a, b) irgend eine Stelle der singulären Curve verstanden.

Aus dem Früheren folgt die Existenz eines Fundamentalsystems des Systems (B′), dessen Glieder von der Form

$$z_\alpha = \psi(x\,,\,y)^r \zeta_\alpha,$$

$$z_\alpha = \psi(x\,,\,y)^r \{\zeta_\alpha + \zeta'_\alpha \log \psi(x\,,\,y) + \ldots\}$$

sind; $\zeta_\alpha\,,\,\zeta'_\alpha\,,\ldots$ verhalten sich in der Umgebung der Stelle $(a\,,\,b)$ eindeutig. Dass diese Functionen in unserem Falle bei geeigneter Wahl von r nicht unendlich werden, also in Potenzreihen von $x - a\,,\,y - b$ entwickelbar sind, lehrt folgende Betrachtung. Setzt man

$$x = a + a't, \qquad y = b + b't,$$

wo $(a\,,\,b)$ eine einfache Stelle der Curve $\psi(x\,,\,y) = 0$ und

$$a'\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{a,b} + b'\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{a,b}$$

nicht gleich Null ist, so wird

$$\psi(x\,,\,y) = t\varphi(t),$$

$$\log\psi(x\,,\,y) = \log t + \chi(t),$$

$$z_\alpha = t^r \bar\zeta_\alpha,$$

$$z_\alpha = t^r\{\bar\zeta_\alpha + \bar\zeta'_\alpha \log t + \ldots\};$$

$\varphi(t)$ ist eine für $t = 0$ nicht verschwindende Potenzreihe von t; $\bar\zeta_\alpha, \bar\zeta'_\alpha, \ldots$ sind in der Umgebung von $t = 0$ eindeutige Functionen von t, die für $t = 0$ unendlich werden oder nicht, je nachdem $\zeta_\alpha\,,\,\zeta'_\alpha\,,\ldots$ an den Stellen von $\psi(x\,,\,y) = 0$ unendlich werden oder nicht. Da aber z_α den Differentialgleichungen

$$t\frac{dz_\alpha}{dt} = \sum_\beta h_{\alpha\beta}(t)\,.\,z_\beta,$$

$$h_{\alpha\beta}(t) = \frac{a' f_{\alpha\beta}(a + a't\,,\,b + b't) + b' g_{\alpha\beta}(a + a't\,,\,b + b't)}{\varphi(t)}$$

genügt, so sind $\bar\zeta_\alpha\,,\,\bar\zeta'_\alpha\,,\ldots$ bei geeigneter Wahl von r Potenzreihen von t, also auch $\zeta_\alpha\,,\,\zeta'_\alpha\,,\ldots$ Potenzreihen von $x - a\,,\,y - b$. Für das System (B″) ergiebt sich hieraus der Satz:

»Das Differentialgleichungensystem (B'') besitzt in der Umgebung der Stelle (a, b) der singulären Curve $\psi(x,y) = 0$ m Lösungen von der Form

$$z_a = \psi(x, y)^{r+\rho_a}\zeta_a,$$

$$z_a = \psi(x, y)^{r+\rho_a}\{\zeta_a + \zeta_a' \log\psi(x, y) + \ldots\},$$

wo sämtliche ζ Potenzreihen von $x - a, y - b$ sind.»

Wird das System (B') durch ein System von Potenzreihen $z_1, \ldots, z_m$ befriedigt, so bestehen die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} \sum_\beta f_{a\beta}(x, y) \,.\, z_\beta \equiv 0 \\ \sum_\beta g_{a\beta}(x, y) \,.\, z_\beta \equiv 0 \end{array}\right\} \bmod \psi(x, y),$$

aus welchen sich die folgenden ergeben:

$$\left.\begin{array}{l} | f_{a\beta}(x, y) | \equiv 0 \\ | g_{a\beta}(x, y) | \equiv 0 \end{array}\right\} \bmod \psi(x, y).$$

Setzt man nun

$$z_a = \psi(x, y)^r \zeta_a$$

in das allgemeine System (B') ein, so genügt ζ_a den Differentialgleichungen

$$\psi(x, y)\frac{\partial \zeta_a}{\partial x} = \sum_\beta \left[f_{a\beta}(x, y) - r\delta_{a\beta}\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]\zeta_\beta.$$

$$\psi(x, y)\frac{\partial \zeta_a}{\partial y} = \sum_\beta \left[g_{a\beta}(x, y) - r\delta_{a\beta}\frac{\partial \psi}{\partial y} \right]\zeta_\beta.$$

Sollen nun $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ Potenzreihen von $x - a, y - b$ sein, so muss r die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} \left| f_{a\beta}(x, y) - r\delta_{a\beta}\frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \equiv 0 \\ \left| g_{a\beta}(x, y) - r\delta_{a\beta}\frac{\partial \psi}{\partial y} \right| \equiv 0 \end{array}\right\} \bmod \psi(x, y)$$

befriedigen, aus welchen, wenn man $x = a, y = b$ setzt, die Gleichungen

$$\left| f_{a\beta}(a, b) - r\delta_{a\beta}\left[\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]_{x=a, y=b} \right| = 0,$$

$$\left| g_{a\beta}(a, b) - r\delta_{a\beta}\left[\frac{\partial \psi}{\partial y}\right]_{x=a, y=b} \right| = 0$$

hervorgehen. Die beiden Congruenzen müssen, da die Existenz von Integralen von der Gestalt

$$z_a = \psi(x, y)^r \mathfrak{P}_a(x - a, y - b)$$

bereits feststeht, dieselben m Wurzeln $r_1, \ldots, r_m$ haben; man erhält für $r_1, \ldots, r_m$ dieselben Werte, welche Stelle (a, b) der singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ man auch in die Congruenzen einsetzt, um aus denselben Gleichungen herzuleiten. Nimmt man Rücksicht auf die Form der Lösungen, wie wir sie im Falle eines mehrfachen Elementarteilers bei einem System mit einer unabhängigen Variablen kennen gelernt haben, so erkennt man, dass die beiden Determinanten

$$\left| f_{\alpha\beta}(x, y) - r\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x} \right|,$$

$$\left| g_{\alpha\beta}(x, y) - r\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial y} \right|$$

dieselben Elementarteiler $(r - r_0)^e$ besitzen, wenn man darin für (x, y) irgend eine Stelle von $\psi(x, y) = 0$ setzt. Geht man schliesslich, ähnlich wie es oben bei einem Systeme mit einer Variablen geschehen ist, von dem System (B′) zu (B″) über, so ergiebt sich der Satz:

»Die aus dem System (B″) hergeleiteten Determinanten

$$\left| f_{\alpha\beta}(x, y) - (r + p_\alpha)\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x} \right|,$$

$$\left| g_{\alpha\beta}(x, y) - (r + p_\alpha)\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial y} \right|$$

stimmen, wenn man für (x, y) eine Stelle von $\psi(x, y) = 0$ setzt, in den Elementarteilern überein. Sind lauter einfache Elementarteiler $r - r_1, \ldots, r - r_m$ vorhanden, und befinden sich unter den Grössen $r_1, \ldots, r_m$ keine zwei mit ganzzahliger Differenz, so ist in der Umgebung einer Stelle (a, b) der singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ — die nicht zugleich einer anderen singulären Curve angehört — ein Fundamentalsystem von der Form

$$\begin{array}{lll} z_{11} = \psi(x, y)^{r_1 + p_1}\zeta_{11}, & \ldots, & z_{m1} = \psi(x, y)^{r_1 + p_m}\zeta_{m1}, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{1m} = \psi(x, y)^{r_m + p_1}\zeta_{1m}, & \ldots, & z_{mm} = \psi(x, y)^{r_m + p_m}\zeta_{mm} \end{array}$$

vorhanden, wo sämtliche ζ Potenzreihen von $x-a$, $y-b$ sind. Einem e-fachen Elementarteiler $r-r_0$ entsprechen e Lösungen, deren Gestalt sich aus der Entwicklung auf S. 142 dadurch ergiebt, dass man t^{r_0} durch $\psi(x, y)^{r_0}$, $\log t$ durch $\log \psi(x, y)$ ersetzt und sich sämtliche ζ als Potenzreihen von $x-a$, $y-b$ vorstellt. In ähnlicher Weise erhält man die Gestalt eines Fundamentalsystems in dem Falle, dass mehrere Wurzeln r sich um ganze Zahlen unterscheiden.»

III.

Die im vorigen Abschnitte über totale lineare Differentialgleichungen abgeleiteten Sätze wenden wir nun an, um das System linearer partieller Differentialgleichungen

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung zu integrieren, dass die Coefficienten a, b, c solche rationale Functionen von x, y sind, dass sich drei linear unabhängige Integrale ergeben. Damit dies der Fall ist, müssen die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

die Integrabilitätsbedingungen des Systems (A), identisch in $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ erfüllt sein. Dass unter dieser Bedingung auch wirklich drei linear un-

abhängige Integrale vorhanden sind, erkennt man, indem man das System (A) in ein System totaler linearer Differentialgleichungen

$$dz_0 = z_1 dx + z_2 dy,$$

$$dz_1 = (a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2)dx + (b_0 z_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2)dy,$$

$$dz_2 = (b_0 z_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2)dx + (c_0 z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2)dy$$

überführt, wo

$$z_0 = z, \qquad z_1 = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad z_2 = \frac{\partial z}{\partial y}$$

gesetzt ist. Infolge der Integrabilitätsbedingungen des Systems (A) sind auch diejenigen des Systems totaler Differentialgleichungen erfüllt. Die Anwendung der Sätze über totale Differentialgleichungen ergiebt Folgendes (vgl. APPELL, Liouv. Journ. 1882):

Dem System (A) genügt eine vieldeutige Function z von x, y, welche drei linear unabhängige Zweige z_0, z_1, z_2 besitzt, durch welche alle übrigen in der Form

$$z = c_0 z_0 + c_1 z_1 + c_2 z_2$$

ausgedrückt werden können. Die Function z hat nur die singulären Curven der rationalen Functionen a, b, c zu singulären Curven. Man nennt das System der drei Integrale z_0, z_1, z_2 ein Fundamentalsystem des Systems (A) und die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_0, & \frac{\partial z_0}{\partial x}, & \frac{\partial z_0}{\partial y} \\ z_1, & \frac{\partial z_1}{\partial x}, & \frac{\partial z_1}{\partial y} \\ z_2, & \frac{\partial z_2}{\partial x}, & \frac{\partial z_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

die Determinante des Fundamentalsystems. Durch irgend einen im Gebiete der Variablen x, y beschriebenen geschlossenen Weg wird das Fundamentalsystem z_0, z_1, z_2 in

$$\bar{z}_0 = c_{00} z_0 + c_{01} z_1 + c_{02} z_2,$$

$$\bar{z}_1 = c_{10} z_0 + c_{11} z_1 + c_{12} z_2,$$

$$\bar{z}_2 = c_{20} z_0 + c_{21} z_1 + c_{22} z_2$$

übergeführt, wo die c Constanten sind, die nur von der Wahl des Weges abhängen. In der Umgebung einer Stelle (a, b) einer singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ existiert ein Fundamentalsystem, dessen Elemente von der Form

$$z = \psi(x, y)^r \zeta,$$

$$z = \psi(x, y)^r \{\zeta + \zeta' \log \psi(x, y) + \ldots\}$$

sind, wo $\zeta, \zeta', \ldots$ Functionen sind, die sich in der Umgebung von (a, b) eindeutig verhalten.

Wir gehen auf das allgemeine System (A) nicht weiter ein, sondern machen über die Coefficienten die Voraussetzung, dass sie in der Umgebung der Stellen $(x = a, y = b)$ der singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ die Form

$$a_0 = \frac{A_0}{\psi^2}, \qquad a_1 = \frac{A_1}{\psi}, \qquad a_2 = \frac{A_2}{\psi},$$

$$b_0 = \frac{B_0}{\psi^2}, \qquad b_1 = \frac{B_1}{\psi}, \qquad b_2 = \frac{B_2}{\psi},$$

$$c_0 = \frac{C_0}{\psi^2}, \qquad c_1 = \frac{C_1}{\psi}, \qquad c_2 = \frac{C_2}{\psi}$$

haben, wo A, B, C in Potenzreihen von $x - a$, $y - b$ entwickelbar sind.

Diese Form besitzen die Coefficienten des Differentialgleichungensystems der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ in der Umgebung der Stellen der sämtlichen singulären Curven.

Das Differentialgleichungensystem

$$\text{(A')} \qquad \begin{aligned} \psi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= A_0 z + \psi A_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \psi A_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \psi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= B_0 z + \psi B_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \psi B_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \psi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= C_0 z + \psi C_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \psi C_2 \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

geht, wenn man

$$z_0 = z, \qquad z_1 = \psi \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad z_2 = \psi \frac{\partial z}{\partial y}$$

setzt, über in das System totaler linearer Differentialgleichungen

$$\psi \frac{\partial z_0}{\partial x} = z_1, \qquad \psi \frac{\partial z_0}{\partial y} = z_2,$$

$$\psi \frac{\partial z_1}{\partial x} = A_0 z_0 + \left(A_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) z_1 + A_2 z_2,$$

$$\psi \frac{\partial z_1}{\partial y} = B_0 z_0 + \left(B_1 - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) z_1 + B_2 z_2,$$

$$\psi \frac{\partial z_2}{\partial x} = B_0 z_0 + B_1 z_1 + \left(B_2 - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) z_2,$$

$$\psi \frac{\partial z_2}{\partial y} = C_0 z_0 + C_1 z_1 + \left(C_2 - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) z_2,$$

welches von der in II. behandelten Form (B′) ist. Daher haben alle Integrale von (A′) die Form

$$z = \psi(x, y)^r \mathfrak{P}(x - a, y - b),$$

$$z = \psi(x, y)^r \{\mathfrak{P}_1(x - a, y - b) + \mathfrak{P}_2(x - a, y - b) \log \psi(x, y) + \ldots\}.$$

Jedenfalls muss ein Integral

$$z = \psi(x, y)^r \zeta,$$

wo ζ eine Potenzreihe von $x - a, y - b$ ist, vorhanden sein; setzt man diesen Ausdruck in (A′) ein, so ergeben sich für ζ die Differentialgleichungen

$$\psi^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = P_0 \zeta + \psi P_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \psi P_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$\psi^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = Q_0 \zeta + \psi Q_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \psi Q_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$\psi^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = R_0 \zeta + \psi R_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \psi R_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

wenn man bezeichnet:

$$P_0 = A_0 + r\left(A_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - r(r-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2,$$

$$Q_0 = B_0 + r\left(B_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + B_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - r(r-1)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$R_0 = C_0 + r\left(C_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + C_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - r(r-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2,$$

$$P_1 = A_1 - 2r\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad Q_1 = B_1 - r\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad R_1 = C_1,$$

$$P_2 = A_2, \qquad Q_2 = B_2 - r\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad R_2 = C_2 - 2r\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Soll ζ eine Potenzreihe von $x-a$, $y-b$ sein, welche nicht das Produkt aus $\psi(x, y)$ in eine andere Potenzreihe von $x-a$, $y-b$ ist, so muss

$$\left.\begin{aligned} P_0 &\equiv 0 \\ Q_0 &\equiv 0 \\ R_0 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \mod \psi(x, y)$$

sein. Es muss also eine Grösse r, welche diese drei Congruenzen gleichzeitig befriedigt, vorhanden sein; wir werden sogleich sehen, dass die drei Gleichungen zweiten Grades in r

$$A_0 + r\left(A_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = r(r-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2,$$

$$B_0 + r\left(B_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + B_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = r(r-1)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$C_0 + r\left(C_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} + C_2 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = r(r-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2,$$

welche man aus den obigen Congruenzen erhält, wenn man für (x, y) eine beliebige Stelle (a, b) der Curve $\psi(x, y) = 0$ setzt, zwei Wurzeln r_1, r_2 gemein haben, welche von der Wahl der Stelle (a, b) unabhängig sind. Es ist allerdings möglich, dass diese Gleichungen zum Teil iden-

tisch erfüllt sind. Hätten die drei Gleichungen nur eine Wurzel gemein, so müsste das System (A′) drei Integrale von einer der folgenden Formen

1) $\psi^r\zeta_1,\ \psi^r\zeta_2,\ \psi^r\zeta_3,$

2) $\psi^r\zeta_1,\ \psi^r\zeta_2,\ \psi^r(\zeta' + \zeta'' \log\psi),$

3) $\psi^r\zeta_1,\ \psi^r(\zeta_2 \log\psi + \zeta_2'),\ \psi^r[\zeta_3(\log\psi)^2 + \zeta_3' \log\psi + \zeta_3'']$

besitzen. Setzt man

$$P_0 = \psi P_0', \qquad Q_0 = \psi Q_0', \qquad R_0 = \psi R_0',$$

so müsste das System

$$\psi\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = P_0'\zeta + P_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + P_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$\psi\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} = Q_0'\zeta + Q_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + Q_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$\psi\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = R_0'\zeta + R_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + R_2\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

entweder ein Integral

$$\zeta = \zeta' \log\psi + \zeta'',$$

wo ζ', ζ'' Potenzreihen sind, besitzen oder durch drei nicht durch $\psi(x, y)$ teilbare Potenzreihen ζ_1, ζ_2, ζ_3 befriedigt werden. Im ersten Falle genügt ζ' demselben Differentialgleichungensystem wie ζ, während sich für ζ'' das System

$$\psi\frac{\partial^2\zeta''}{\partial x^2} = P_0'\zeta'' + P_1\frac{\partial\zeta''}{\partial x} + P_2\frac{\partial\zeta''}{\partial y} + U\zeta' - 2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta'}{\partial x},$$

$$\psi\frac{\partial^2\zeta''}{\partial x\partial y} = Q_0'\zeta'' + Q_1\frac{\partial\zeta''}{\partial x} + Q_2\frac{\partial\zeta''}{\partial y} + V\zeta' - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta'}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta'}{\partial y}\right),$$

$$\psi\frac{\partial^2\zeta''}{\partial y^2} = R_0'\zeta'' + R_1\frac{\partial\zeta''}{\partial x} + R_2\frac{\partial\zeta''}{\partial y} + W\zeta' - 2\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta'}{\partial y}$$

ergiebt, worin

$$U = -\frac{P_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2}{\psi},$$

$$V = \frac{Q_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\psi},$$

$$W = \frac{R_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + R_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}{\psi}.$$

Da nun die Potenzreihe ζ' nicht durch $\psi(x, y)$ teilbar sein darf, so müssen die Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} P_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 &\equiv 0 \\ Q_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} &\equiv 0 \\ R_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + R_1 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \bmod \psi$$

bestehen; d. h. die determinierenden Gleichungen des Systems für ζ:

$$s\left(P_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - s(s-1)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \equiv 0,$$

$$s\left(Q_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - s(s-1)\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} \equiv 0,$$

$$s\left(R_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + R_2 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - s(s-1)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \equiv 0$$

haben die doppelte Wurzel $s = 0$; dann ist r eine doppelte gemeinschaftliche Wurzel der obigen drei Gleichungen, so dass diese doch zwei Wurzeln gemein haben.

Würde das System für ζ durch drei nicht durch $\psi(x, y)$ teilbare Potenzreihen befriedigt, so wäre $\psi(x, y) = 0$ gar keine singuläre Curve, und das System für ζ hätte die Form

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = L_0\zeta + L_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + L_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} = M_0\zeta + M_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + M_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = N_0\zeta + N_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + N_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

unter L, M, N Potenzreihen von $x - a, y - b$ verstanden. Die Substitution

$$\zeta = \psi^{-r}z$$

liefert das Differentialgleichungensystem, welchem z genügt. Man findet, dass die determinierenden Gleichungen dieses Systems die beiden Wurzeln r und $r + 1$ besitzen, was mit der Annahme, dass dieselben nur eine einzige Wurzel r gemein haben, in Widerspruch steht.

Somit ist bewiesen, dass die drei Congruenzen

$$P_0 \equiv 0, \qquad Q_0 \equiv 0, \qquad R_0 \equiv 0, \qquad \text{mod } \psi(x, y),$$

wo P_0, Q_0, R_0 die oben definierten ganzen Functionen zweiten Grades von r sind, zwei (verschiedene oder zusammenfallende) Wurzeln gemein haben. Sind die beiden Wurzeln r_1, r_2 von einander verschieden und ist ihre Differenz keine ganze Zahl, so sind zwei Integrale von der Form

$$z = \psi(x, y)^{r_1}\zeta$$

und eines von der Form

$$z = \psi(x, y)^{r_2}\zeta$$

vorhanden, unter ζ Potenzreihen von $x - a, y - b$ verstanden. Es ist nur zu ermitteln, welcher der beiden Wurzeln zwei Integrale zugehören. Man berechnet, unter r eine der beiden Wurzeln verstehend, die oben eingeführten Grössen P, Q, R; da dem System

$$\psi\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = P_0'\zeta + P_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + P_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$\psi\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\partial y} = Q_0'\zeta + Q_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + Q_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

$$\psi\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = R_0'\zeta + R_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + R_2\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

durch eine Potenzreihe ζ genügt wird, so bestehen die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} P_0'\zeta + P_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + P_2\frac{\partial\zeta}{\partial y} \equiv 0 \\ Q_0'\zeta + Q_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + Q_2\frac{\partial\zeta}{\partial y} \equiv 0 \\ R_0'\zeta + R_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + R_2\frac{\partial\zeta}{\partial y} \equiv 0 \end{array}\right| \bmod \phi(x\,,y)$$

so dass auch

$$\begin{vmatrix} P_0', & P_1, & P_2 \\ Q_0', & Q_1, & Q_2 \\ R_0', & R_1, & R_2 \end{vmatrix} \equiv 0, \bmod \phi(x\,,y)$$

sein muss. Sind nicht alle Subdeterminanten dieser Determinante $\equiv 0$, mod $\phi(x\,,y)$, so kann man von den zu einer Stelle $(a\,,b)$ der singulären Curve $\phi(x\,,y) = 0$ gehörigen Werten von $\zeta, \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}$ zwei durch den dritten ausdrücken, während in dem Falle, wo alle jene Subdeterminanten $\equiv 0$, mod $\phi(x\,,y)$ sind, zwei der Grössen $\zeta, \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}$ willkürlich bleiben. Im ersteren Falle existiert eine, im letzteren zwei Potenzreihen ζ.

»Infolge der Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungensystems (A') haben die drei Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} A_0 + r\left(A_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + A_2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \equiv r(r-1)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \\ B_0 + r\left(B_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + B_2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \equiv r(r-1)\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ C_0 + r\left(C_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + C_2\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \equiv r(r-1)\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 \end{array}\right| \bmod \phi(x\,,y)$$

zwei Wurzeln $r_1\,, r_2$ — die von $x\,,y$ unabhängig sind — gemein. Sind dieselben von einander verschieden und ist ihre Differenz keine ganze Zahl, so besitzt (A') in der Umgebung einer Stelle $(a\,,b)$ der singulären Curve $\phi(x\,,y) = 0$ ein Fundamentalsystem von folgender Gestalt:

$$z_0 = \psi(x, y)^{r_1}\mathfrak{P}_0(x-a, y-b),$$
$$z_1 = \psi(x, y)^{r_1}\mathfrak{P}_1(x-a, y-b),$$
$$z_2 = \psi(x, y)^{r_2}\mathfrak{P}_2(x-a, y-b).»$$

Wir haben noch die beiden Fälle zu behandeln, wo $r_1 = r_2$ und $r_2 - r_1 = e$ eine ganze Zahl ist. Im ersten Falle könnte nach dem Früheren ein Integral

$$z = \psi(x, y)^{r_1}\{\zeta'(\log\psi)^2 + \zeta''\log\psi + \zeta'''\},$$

worin ζ', ζ'', ζ''' Potenzreihen sind, vorkommen. Die erste der drei zur Bestimmung von ζ''' dienenden Differentialgleichungen wäre:

$$\psi\frac{\partial^2\zeta'''}{\partial x^2} = P_0'\zeta''' + P_1\frac{\partial\zeta'''}{\partial x} + P_2\frac{\partial\zeta'''}{\partial y} + U\zeta'' - 2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta''}{\partial x} - 2\frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2}{\psi}\zeta';$$

da hier ζ' nicht durch ψ teilbar sein dürfte, so müsste

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \equiv 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} \equiv 0, \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 \equiv 0, \qquad \text{mod } \psi$$

sein; da diese Bedingungen nicht erfüllbar sind, so ist ein Integral von der vorausgesetzten Form nicht vorhanden. Ein Integral

$$z = \psi(x, y)^r(\zeta'\log\psi + \zeta'')$$

muss aber existieren, da zwei um 1 verschiedene Wurzeln vorhanden sind, wenn das System (A') durch drei Integrale $z = \psi^r\zeta$ befriedigt wird. In unserem Falle müssen alle aus dem System

$$\begin{matrix} P_0', & P_1, & P_2, \\ Q_0', & Q_1, & Q_2, \\ R_0', & R_1, & R_2 \end{matrix}$$

gebildeten Determinanten zweiten Grades $\equiv 0$, mod ψ, sein, denn wäre

dies nicht der Fall, so hätte das System (A′) nur ein Integral $z = \psi^r \zeta$, aber, wie man leicht nachrechnet, auch nur ein Integral

$$z = \psi^r(\zeta' \log\psi + \zeta''),$$

also nur zwei linear unabhängige Integrale.

»Ist $r_1 = r_2 = r$, so besitzt das System (A′) ein Fundamentalsystem von folgender Form

$$z_1 = \psi(x\,,\,y)^r \zeta_1\,,$$
$$z_2 = \psi(x\,,\,y)^r \zeta_2\,,$$
$$z_3 = \psi(x\,,\,y)^r[\zeta' \log\psi(x\,,\,y) + \zeta''];$$

$\zeta_1\,,\,\zeta_2\,,\,\zeta'\,,\,\zeta''$ sind Potenzreihen von $x - a\,,\,y - b$, und es ist

$$\zeta' = c_1\zeta_1 + c_2\zeta_2.«$$

Letzteres kommt daher, dass auch der Coefficient von $\log\psi$ in z_3, nämlich $\psi^r\zeta'$, ein Integral von (A′) ist. Es sei nun $r_2 = r\,,\,r_1 = r + e$, wo e eine ganze positive Zahl ist. Soll ein Integral vorhanden sein, welches in Bezug auf $\log\psi$ vom zweiten Grade ist, so muss dasselbe eine der beiden Formen

$$\psi^{r+e}\zeta^{(0)}(\log\psi)^2 + \psi^{r+e}\zeta' \log\psi + \psi^r\zeta'',$$
$$\psi^{r+e}\zeta^{(0)}(\log\psi)^2 + \psi^r\zeta' \log\psi + \psi^r\zeta''$$

haben. Im ersten Falle müsste auch ein Integral von der Form

$$\psi^{r+e}(\zeta^{(0)} \log\psi + c\zeta')$$

existieren, was aber nur dann möglich ist, wenn $r_1 = r_2$ ist. Im zweiten Falle ergeben sich für ζ'' drei Differentialgleichungen, deren erste ist

$$\psi\frac{\partial^2\zeta''}{\partial x^2} = P_0'\zeta'' + P_1\frac{\partial\zeta''}{\partial x} + P_2\frac{\partial\zeta''}{\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\zeta' - 2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta'}{\partial x} + \psi^{e-1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\zeta^{(0)}$$
$$+ \frac{P_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + P_2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2}{\psi}\zeta^{(0)};$$

der Zähler des letzten Gliedes müsste durch ψ teilbar und folglich $r_1 = r_2$ sein.

»Ist $r_1 - r_2 = e$ eine ganze positive Zahl, so hat das System (A') ein oder zwei Integrale von der Form

$$z = \psi(x, y)^{r_1}\zeta$$

und zwei bez. ein Integral von der Form

$$z = \psi(x, y)^{r_1}\zeta' \log\psi(x, y) + \psi(x, y)^{r_2}\zeta'',$$

wo sämtliche ζ Potenzreihen von $x - a, y - b$ sind.»

Ob ein oder zwei Integrale von der ersten Form vorhanden sind, erkennt man wie oben; es kann auch vorkommen, dass die logarithmischen Glieder wegfallen, was aber nicht möglich ist, wenn $r_1 = r_2$ ist.

Wir sind nun im Stande, das Differentialgleichungensystem der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ zu behandeln. Man kann demselben die Form geben:

$$x(1 - x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left((\alpha + \beta + 1)x - \gamma - \frac{\beta'(1 - x)y}{x - y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta y(1 - y)}{x - y}\frac{\partial z}{\partial y} + \alpha\beta z,$$

$$(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \beta'\frac{\partial z}{\partial x} - \beta\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$y(1 - y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left((\alpha + \beta' + 1)y - \gamma - \frac{\beta x(1 - y)}{y - x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\beta' x(1 - x)}{y - x}\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha\beta' z.$$

In der Umgebung der Stellen der singulären Curven $x = 0$, $y = 0$, $1 - x = 0$, $1 - y = 0$, $x - y = 0$ ist das System von der Form (A'). Führt man dasselbe durch die Substitution $x = \frac{1}{x'}$ über in

$$x'^2(1 - x')\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} =$$

$$x'\left(\alpha + \beta - 1 - (\gamma - 2)x' + \frac{\beta' x'(1 - x')y}{1 - x'y}\right)\frac{\partial z}{\partial x'} - \frac{\beta x' y(1 - y)}{1 - x'y}\frac{\partial z}{\partial y} - \alpha\beta z,$$

$$x'(1 - x'y)\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y} = \beta' x'^2\frac{\partial z}{\partial x'} + \beta\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$y(1 - y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\beta' x'(1 - x')}{x'y - 1}\frac{\partial z}{\partial x'} + \left((\alpha + \beta' + 1)y - \gamma - \frac{\beta(1 - y)}{x'y - 1}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \alpha\beta' z,$$

so erkennt man, dass es auch in der Nähe der unendlich fernen Linie $x = \infty$ oder $x' = 0$ dieselbe Form besitzt. Dasselbe gilt für die andere unendlich ferne Linie $y = \infty$. Setzt man für $\psi(x, y)$ der Reihe nach

$$1)\quad x, \qquad 2)\quad 1-x, \qquad 3)\quad x-y, \qquad 4)\quad x',$$

so erhält man für die Coefficienten des Systems (A')

$$\begin{array}{l} A_0, A_1, A_2, \\ B_0, B_1, B_2, \\ C_0, C_1, C_2 \end{array}$$

an einer Stelle (x, y) der jedesmaligen singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ bezw. die folgenden Werte:

$$1)\quad \begin{array}{lll} 0, & \beta' - \gamma, & -\beta(1-y), \\ 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0; \end{array}$$

$$2)\quad \begin{array}{lll} 0, & \alpha + \beta - \gamma + 1, & \beta y, \\ 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0; \end{array}$$

$$3)\quad \begin{array}{lll} 0, & -\beta', & \beta, \\ 0, & \beta', & -\beta, \\ 0, & -\beta', & \beta; \end{array}$$

$$4)\quad \begin{array}{lll} -\alpha\beta, & \alpha + \beta - 1, & -\beta y(1-y), \\ 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0. \end{array}$$

Die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} A_0 + r\left(A_1 \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + A_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) \equiv r(r-1)\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \\ B_0 + r\left(B_1 \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + B_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) \equiv r(r-1)\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ C_0 + r\left(C_1 \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + C_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) \equiv r(r-1)\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 \end{array}\right\} \bmod \psi(x, y)$$

liefern, wenn man für (x, y) eine Stelle der jedesmaligen singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ setzt, die zur Bestimmung von r dienenden Gleichungen:

$$1)\quad r(\beta' - \gamma) = r(r - 1),$$

$$2)\quad -r(\alpha + \beta - \gamma + 1) = r(r - 1),$$

$$3)\quad r(\beta + \beta') = -r(r - 1),$$

$$4)\quad \alpha\beta + r(\alpha + \beta - 1) = r(r - 1),$$

welche die Wurzeln 1) $0, 1 + \beta' - \gamma$; 2) $0, \gamma - \alpha - \beta$; 3) $0, 1 - \beta - \beta'$; 4) α, β ergeben. Ähnlich verfährt man bei den singulären Curven $y = 0$, $1 - y = 0$, $y = \infty$. Sind die Constanten der Reihe $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ so beschaffen, dass keine der Gleichungen für r zwei gleiche oder um eine ganze Zahl verschiedene Wurzeln besitzt, so ergeben sich die in der Einleitung angegebenen Fundamentalsysteme.

Die Frage nach dem Verhalten der Integrale von (A) und (A′) in der Umgebung einer Schnittstelle (a, b) zweier singulärer Curven $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$ möge für eine andere Gelegenheit aufgespart bleiben, ebenso die Frage nach den notwendigen Bedingungen für das Vorhandensein lauter regulärer Integrale in der Umgebung der Stellen einer singulären Curve $\psi(x, y) = 0$ eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen von der Form (A).

IV.

Die bisherigen Resultate können in verschiedener Hinsicht verallgemeinert werden.

Wenn man die Entwicklungen des ersten Abschnitts auf Functionen mit n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ ausdehnt, was ohne irgend welche Mühe möglich ist, so ergeben sich folgende Definitionen und Sätze:

Wenn sich eine analytische Function von $x_1, \ldots, x_n$, $F(x_1, \ldots, x_n)$, an allen der irreduciblen algebraischen Gleichung $\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ genügenden Stellen $(x_1, \ldots, x_n)$ singulär verhält, so wird das algebraische

Gebilde $\psi(x_1,\ldots,x_n)=0$ ein singuläres Gebilde der Function $F(x_1,\ldots,x_n)$ genannt. Ein im Gebiete der Variablen $x_1,\ldots,x_n$ verlaufender geschlossener Weg umwindet das singuläre Gebilde $\psi(x_1,\ldots,x_n)=0$ λ-fach in positivem Sinne, wenn beim Durchlaufen dieses Weges das Argument der complexen Grösse $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ um $2\lambda\pi i$ wächst. Ist nun $(a_1,\ldots,a_n)$ eine Stelle des singulären Gebildes $\psi(x_1,\ldots,x_n)=0$, welche nicht zugleich einem anderen singulären Gebilde angehört, so führt jeder in der Umgebung von $(a_1,\ldots,a_n)$ verlaufende geschlossene Weg, welcher das Gebilde $\psi(x_1,\ldots,x_n)=0$ nicht umwindet, die mehrdeutige Function $F(x_1,\ldots,x_n)$ zu ihrem ursprünglichen Werte zurück. Ist $(b_1,\ldots,b_n)$ irgend eine andere Stelle des irreductiblen Gebildes $\psi(x_1,\ldots,x_n)=0$, so zeigt die Function, wenn sie das singuläre Gebilde in der Umgebung der Stelle $(b_1,\ldots,b_n)$ umwindet, das nämliche Verhalten, wie wenn die Umwindung in der Umgebung der Stelle $(a_1,\ldots,a_n)$ stattfindet, wie dies für $n=2$ im ersten Abschnitt näher auseinandergesetzt wurde.

Die Anwendung dieser Sätze auf bestimmte mehrdeutige Functionen von n Veränderlichen, wie z. B. auf die Integrale linearer Differentialgleichungen mit n unabhängigen Variablen, geschieht in derselben Weise wie im Falle zweier Variablen. Die Ausdehnung der im zweiten Abschnitt über totale lineare Differentialgleichungen mit einer und zwei unabhängigen Variablen bewiesenen Sätze auf Differentialgleichungen mit n Variablen, d. h. auf Differentialgleichungensysteme von der Form

$$dy_\alpha = \sum_\beta A^{(1)}_{\alpha\beta} y_\beta \,.\, dx_1 + \ldots + \sum_\beta A^{(n)}_{\alpha\beta} y_\beta \,.\, dx_n \qquad (\alpha,\beta=1,\ldots,m)$$

wo $A^{(1)}_{\alpha\beta},\ldots,A^{(n)}_{\alpha\beta}$ Functionen von $x_1,\ldots,x_n$ sind, welche die Integrabilitätsbedingungen erfüllen, ist so einfach, dass wir von einer Angabe der verallgemeinerten Sätze absehen können.

Schwieriger dagegen ist die Ausdehnung der Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung auf Differentialgleichungen mit n Variablen, d. h. die Verallgemeinerung der Entwicklungen von III.

Das allgemeine Integral einer linearen partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{(\nu)} A_{\nu_1,\ldots,\nu_n} \frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_n^{\nu_n}} = 0,$$

deren Coefficienten $A_{\nu_1,\dots,\nu_n}$ Functionen von $x_1, \dots, x_n$ sind, enthält nicht wie das allgemeine Integral einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung m willkürliche Constanten, sondern m willkürliche Functionen von $n-1$ Veränderlichen. Mehrere lineare partielle Differentialgleichungen haben im allgemeinen gar kein Integral gemein; wenn aber die Coefficienten gewisse Bedingungen erfüllen, kann es eintreten, dass die Differentialgleichungen ein gemeinsames Integral mit einer endlichen Anzahl willkürlicher Functionen von $n-1, n-2, \dots, 1, 0$ Variablen besitzen. Wir beschäftigen uns hier nur mit dem Fall, wo das allgemeine Integral des Differentialgleichungensystems

$$\sum_{(\nu)} A^{(\alpha)}_{\nu_1,\dots,\nu_n} \frac{\partial^{\nu_1+\dots+\nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} = 0 \qquad (\alpha=1,\dots,p)$$

— unter $A^{(\alpha)}_{\nu_1,\dots,\nu_n}$ sind Functionen von $x_1, \dots, x_n$ verstanden — m willkürliche Constanten $c_1, \dots, c_m$ enthält, also von der Form

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_m y_m$$

ist, und zwar stellen wir zunächst solche Differentialgleichungensysteme von besonderer Gestalt auf.

Eine Differentialgleichung mit einer unabhängigen Variablen x erhält man, indem man $\frac{d^m y}{dx^m}$ als lineare homogene Function von $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ darstellt:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + p_{m-1} \frac{dy}{dx} + p_m y.$$

Durch wiederholte Differentiation der Differentialgleichung kann man alle Ableitungen $\frac{d^\lambda y}{dx^\lambda}$ durch $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ linear ausdrücken. Auch im Falle von n Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ nehmen wir zunächst gewisse m niedrigste Ableitungen — zu denen auch y selbst gehört — an und stellen gewisse nächst höhere Ableitungen als lineare homogene Functionen jener m Ableitungen dar, so dass man durch wiederholte Differentiation alle höheren Ableitungen durch die m zuerst angenommenen

Ableitungen ausgedrückt erhält. Für die partiellen Ableitungen wird die Bezeichnung

$$y^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = \frac{\partial^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n} y}{\partial x_1^{\lambda_1}\ldots\partial x_n^{\lambda_n}}$$

angewandt; das Wertsystem $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ wird als Indexsystem der Ableitung bezeichnet. Wir bilden zunächst eine Gruppe von m Indexsystemen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von der Eigenschaft, dass, wenn $(\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$ ein Indexsystem der Gruppe ist, auch das Indexsystem $(\alpha_1'', \ldots, \alpha_n'')$ derselben angehört, falls $\alpha_1'' \leqq \alpha_1', \ldots, \alpha_n'' \leqq \alpha_n'$ ist. Aus dieser ersten Gruppe leiten wir eine zweite Gruppe von Indexsystemen $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ ab; wir bilden nämlich aus jedem Indexsystem $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ der ersten Gruppe die Indexsysteme $(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha_1, \alpha_2 + 1, \ldots, \alpha_n)$, $\ldots$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n + 1)$, lassen aber diejenigen, welche schon in der ersten Gruppe vorkommen, wieder weg. Sodann denken wir uns alle Ableitungen, deren Indexsysteme der zweiten Gruppe angehören, als lineare homogene Functionen derjenigen m Ableitungen dargestellt, deren Indexsysteme in der ersten Gruppe enthalten sind. Wir erhalten so eine Anzahl Gleichungen von der Form

$$y^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} = \sum_{(\alpha)} P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} \cdot y^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)};$$

die Coefficienten P setzen wir als eindeutige analytische Functionen von $x_1, \ldots, x_n$ voraus. Ist nun $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ irgend ein Indexsystem, so erhält man $y^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}$ durch Differentiation aus den gegebenen Differentialgleichungen und zwar im allgemeinen auf verschiedene Arten. Damit sämtliche Ausdrücke, die sich für $y^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}$ ergeben, übereinstimmen, müssen die Coefficienten $P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}$ gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllen, deren Aufstellung wir unterlassen, die wir aber immer als erfüllt voraussetzen. Man erhält dann

$$y^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = \sum_{(\alpha)} P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} \cdot y^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)},$$

wo die Coefficienten $P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}$ aus den Functionen $P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}$ und deren Ableitungen gebildet sind, und zwar durch Addition und Multiplication. Wenn sich sämtliche Functionen $P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}$ an der Stelle $(x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n)$ regulär verhalten und wenn die Werte der p Ableitungen der ersten Gruppe an dieser Stelle willkürlich festgesetzt sind, $y^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = \eta^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}$, so

erhält man für alle übrigen Ableitungen endliche Werte, z. B. $y^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = \eta^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}$. Die Potenzreihe

$$y = \sum_\lambda \eta^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} \frac{(x_1 - a_1)^{\lambda_1}}{\underline{|\lambda_1}} \cdots \frac{(x_n - a_n)^{\lambda_n}}{\underline{|\lambda_n}}$$

convergiert — wie sich aus einem Satze von BOUQUET über totale Differentialgleichungen ergiebt — und stellt somit ein dem Differentialgleichungensystem genügendes Functionselement dar. Da sich sämtliche Grössen $\eta^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}$ als lineare homogene Functionen der m Ableitungen $\eta^{(a_1,\ldots,a_n)}$, deren Anfangswerte wir nun mit $c_1, \ldots, c_m$ bezeichnen, darstellen lassen, so nimmt obige Potenzreihe die Form an:

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_m y_m,$$

wo $y_1, \ldots, y_m$ Potenzreihen von $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ sind. Unser Differentialgleichungensystem besitzt also m linear unabhängige Integrale $y_1, \ldots, y_m$, durch welche sich jedes Integral y linear ausdrücken lässt; wir sagen, dass $y_1, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem bilden, und nennen die Determinante

$$| y_\alpha^{(a_1,\ldots,a_n)} |,$$

in welcher für α die Zahlen $1, \ldots, m$ und für $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ die bekannten m Indexsysteme zu setzen sind, die Determinante des Fundamentalsystems.

Ein Differentialgleichungensystem der betrachteten Art ist z. B. das folgende:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\alpha\beta}^{(\nu)} \frac{\partial y}{\partial x_\nu} + a_{\alpha\beta} y, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

ferner das System, welches man erhält, wenn man

$$\frac{\partial^m y}{\partial x_\alpha^m}, \frac{\partial y}{\partial x_\beta}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \ldots, \frac{\partial^m y}{\partial x_\alpha^{m-1} \partial x_\beta},$$

wo für α eine bestimmte der Zahlen $1, \ldots, n$ und für β die Zahlen $1, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, n$ zu setzen sind, linear durch

$$y, \frac{\partial y}{\partial x_\alpha}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x_\alpha^{m-1}}$$

ausdrückt.

Es sei nun ein System linearer partieller Differentialgleichungen von beliebiger Gestalt

$$\sum_{(\nu)} A^{(a)}_{\nu_1,\ldots,\nu_n} \cdot y^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = 0 \qquad (a=1,\ldots,p)$$

gegeben, welches m linear unabhängige Integrale besitzt. Die Bedingungen, welche die Coefficienten erfüllen müssen, damit dies stattfindet, werden hier nicht aufgestellt. Es giebt dann m Integrale $y_1, \ldots, y_m$ von der Beschaffenheit, dass sich jedes Integral y in der Form

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_m y_m$$

darstellen lässt. Gehen $y_1, \ldots, y_m$, wenn die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ einen geschlossenen Weg beschreiben, über in $y'_1, \ldots, y'_m$, so bestehen Relationen von der Form

$$\begin{aligned} y'_1 &= c_{11} y_1 + \cdots + c_{1m} y_m, \\ &\cdot\ \cdot\ ,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y'_m &= c_{m1} y_1 + \cdots + c_{mm} y_m \end{aligned}$$

mit constanten Coefficienten. Hat man nun ein System von m Functionen, welches sich bei einem Umlauf der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ in der angegebenen Weise verhält, so genügen dieselben einem Systeme linearer Differentialgleichungen von der Gestalt

$$y^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} = \sum_{(\alpha)} P^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} y^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)},$$

vorausgesetzt, dass die Determinante

$$\Delta = \left| y_\gamma^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} \right| \qquad (\gamma=1,\ldots,m)$$

nicht identisch verschwindet. Aus den m Gleichungen

$$y_\gamma^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)} = \sum_{(\alpha)} P^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} y_\gamma^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} \qquad (\gamma=1,\ldots,m)$$

berechnet man

$$P^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \frac{\Delta^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}}{\Delta},$$

wo $\Delta^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ die Determinante ist, welche aus Δ hervorgeht, wenn man das eine Indexsystem $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ durch $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ ersetzt. Bei jedem

geschlossenen Wege der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gehen $y_1, \ldots, y_m$ über in Ausdrücke von der Form

$$c_{11}y_1 + \ldots + c_{1m}y_m, \ldots, c_{m1}y_1 + \ldots + c_{mm}y_m,$$

die beiden Determinanten Δ und $\Delta_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}$ werden dadurch mit

$$| c_{\alpha\beta} | \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

multipliciert, so dass ihr Quotient ungeändert bleibt; $P_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}$ ist daher eine eindeutige Function von $x_1, \ldots, x_n$.

Sind $y_1, \ldots, y_m$ Functionen einer einzigen Veränderlichen x, so nennt man bekanntlich die Determinante

$$\left| y_\alpha, \frac{dy_\alpha}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y_\alpha}{dx^{m-1}} \right| \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

die Determinante des Functionensystems; man beweist, dass diese Determinante nicht identisch verschwindet, wenn die m Functionen linear unabhängig sind, d. h. wenn keine Relation

$$c_1y_1 + \ldots + c_my_m = 0$$

mit constanten Coefficienten besteht. Sind $y_1, \ldots, y_m$ Functionen von $x_1, \ldots, x_n$, so lassen sich mehrere der obigen analoge Determinanten bilden; einem System von drei Functionen y_0, y_1, y_2 zweier Variablen x_1, x_2 entsprechen z. B. die Determinanten

$$\left| y_\alpha, \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_2} \right|,$$

$$\left| y_\alpha, \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x_1^2} \right|, \qquad (\alpha = 0, 1, 2)$$

$$\left| y_\alpha, \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x_2^2} \right|.$$

Im allgemeinen Falle entspricht jeder der verschiedenen Gruppen von je m Indexsystemen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, welche in der oben angegebenen Weise gebildet werden können, eine Determinante

$$\left| y_\gamma^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \right|. \qquad (\gamma = 1, \ldots, m)$$

Wir werden sehen, dass nicht alle diese Determinanten identisch verschwinden können, wenn die Functionen $y_1, \dots, y_m$ linear unabhängig sind. Nimmt man die Zahlen $1, \dots, n$ in irgend einer Reihenfolge, und sind für je zwei aufeinanderfolgende Zahlen α, β sämtliche Determinanten

$$\left| y_\gamma, \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha}, \dots, \frac{\partial^\lambda y_\gamma}{\partial x_\alpha^\lambda}, \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta}, \dots, \frac{\partial^\mu y_\gamma}{\partial x_\beta^\mu} \right|, \qquad (\gamma = 1, \dots, m)$$

worin λ, μ irgend zwei ganze positive Zahlen (einschliesslich 0) mit der Summe $\lambda + \mu = m - 1$ sind, identisch gleich Null, so sind m Functionen $C_1, \dots, C_m$ von $x_1, \dots, x_n$ derart vorhanden, dass gleichzeitig folgende Gleichungen bestehen:

$$\sum_\gamma C_\gamma y_\gamma = 0, \quad \sum_\gamma C_\gamma \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \dots, \quad \sum_\gamma C_\gamma \frac{\partial^{m-1} y_\gamma}{\partial x_\alpha^{m-1}} = 0. \qquad (\alpha = 1, \dots, n)$$

Durch Differentiation dieser Gleichungen erhält man die folgenden:

$$\sum_\gamma \frac{\partial C_\gamma}{\partial x_\alpha} y_\gamma = 0, \quad \sum_\gamma \frac{\partial C_\gamma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \dots, \quad \sum_\gamma \frac{\partial C_\gamma}{\partial x_\alpha} \frac{\partial^{m-2} y_\gamma}{\partial x_\alpha^{m-2}} = 0. \qquad (\alpha = 1, \dots, n)$$

Die Vergleichung der beiden Reihen von Gleichungen ergiebt:

$$C_1 : \dots : C_m = \frac{\partial C_1}{\partial x_\alpha} : \dots : \frac{\partial C_m}{\partial x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \dots, n)$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{C_1}{C_\gamma} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{C_m}{C_\gamma} = 0, \qquad (\alpha = 1, \dots, n)$$

wo γ eine der Zahlen $1, \dots, n$ ist; d. h. die Verhältnisse der Grössen $C_1, \dots, C_m$ sind constant und mithin $y_1, \dots, y_m$ nicht unabhängig. Sollen also diese Functionen linear unabhängig sein, so dürfen nicht alle oben angeschriebenen Determinanten verschwinden.

Hiermit ist bewiesen, dass die Integrale eines Differentialgleichungensystems von der Form

$$\sum_{(\nu)} A^{(\alpha)}_{\nu_1, \dots, \nu_n} \frac{\partial^{\nu_1 + \dots + \nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots, p)$$

mit m linear unabhängigen Integralen übereinstimmen mit den Integralen eines Systems von der Gestalt

$$\text{(D)} \qquad y^{(\beta_1,\dots,\beta_n)} = \sum_{(a)} P^{(\beta_1,\dots,\beta_n)}_{a_1,\dots,a_n} y^{(a_1,\dots,a_n)}.$$

Wenn man auch nicht jede der möglichen Gruppen von m Indexsystemen dem letzteren System von Differentialgleichungen zu Grunde legen kann, so ist doch sicher eine dieser Gruppen zulässig, weil immer eine Determinante nicht verschwindet. Es muss also möglich sein, aus dem ersten Differentialgleichungensystem alle Ableitungen $y^{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}$ durch die m Ableitungen $y^{(a_1,\dots,a_n)}$ auszudrücken; indem man die $y^{(\beta_1,\dots,\beta_n)}$ durch die $y^{(a_1,\dots,a_n)}$ ausdrückt, erhält man das letztere System.

Man hätte nun folgende Aufgabe zu lösen: Ist ein beliebiges System linearer partieller Differentialgleichungen

$$\sum_{(\nu)} A^{(a)}_{\nu_1,\dots,\nu_n} \frac{\partial^{\nu_1+\dots+\nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1}\dots\partial x^{\nu_n}} = 0 \qquad (a=1,\dots,p)$$

gegeben, so sind die Bedingungen zu ermitteln, unter welchen dasselbe m linear unabhängige Integrale besitzt; man hat dann, wenn man mit $y_1,\dots,y_m$ ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungensystems bezeichnet, zu untersuchen, welche der verschiedenen Determinanten

$$\left| y_i^{(a_1,\dots,a_n)} \right| \qquad (i=1,\dots,m)$$

von Null verschieden sind; hat man gefunden, dass eine bestimmte dieser Determinanten nicht verschwindet, so hat man das gegebene System von Differentialgleichungen auf die Form

$$y^{(\beta_1,\dots,\beta_n)} = \sum_{(a)} P^{(\beta_1,\dots,\beta_n)}_{a_1,\dots,a_n} y^{(a_1,\dots,a_n)}$$

zu bringen. Diese Aufgabe, die eine Verallgemeinerung der bereits gelösten Frage nach den Bedingungen, unter welchen zwei gewöhnliche Differentialgleichungen mehrere particuläre Integrale gemein haben (vgl. Grünfeld, Zeitschrift für Mathematik 1885), darstellt, soll jedoch hier nicht behandelt werden.

Man könnte sich also auf Systeme von der Form

$$y^{(\beta_1,\dots,\beta_n)} = \sum_{(a)} P^{(\beta_1,\dots,\beta_n)}_{a_1,\dots,a_n} y^{(a_1,\dots,a_n)}$$

beschränken, welche sich, wie wir gleich sehen werden, auf Systeme totaler linearer Differentialgleichungen zurückführen lassen. Bezeichnet man die m Ableitungen $y^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$ in irgend einer Reihenfolge mit y_a ($\alpha = 1,\dots,m$), so ist $\frac{\partial y_a}{\partial x_\nu}$ ($\nu = 1,\dots,n$) eine lineare homogene Function von $y_1,\dots,y_m$. Ist nämlich $y_a = y^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$ und gehört $(\alpha_1,\dots,\alpha_\nu+1,\dots,\alpha_n)$ der Gruppe der Indexsysteme $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ nicht ebenfalls an, so muss es in der Gruppe der $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ enthalten sein; es ist daher

$$\frac{\partial y_a}{\partial x_\nu} = \sum_{(\alpha)} P^{(\beta_1,\dots,\beta_n)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} y^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)},$$

d. h. eine lineare homogene Function von $y_1,\dots,y_m$.

Unser System linearer partieller Differentialgleichungen ist somit auf ein System von der Form

$$\frac{\partial y_a}{\partial x_\nu} = \sum_\beta A^{(\nu)}_{\alpha\beta} y_\beta, \qquad \left(\begin{matrix}\alpha,\beta=1,\dots,m\\ \nu=1,\dots,n\end{matrix}\right)$$

also auf ein System totaler linearer Differentialgleichungen zurückgeführt, worin die Coefficienten $A^{(\nu)}_{\alpha\beta}$ Functionen von $x_1,\dots,x_n$ sind.

Indem man die über totale Differentialgleichungen im zweiten Abschnitte bewiesenen Sätze, die sich ohne Mühe auf Differentialgleichungen mit n unabhängigen Veränderlichen ausdehnen lassen, auf das System (D) anwendet, ergiebt sich Folgendes: Die singulären Gebilde der Functionen $P^{(\beta_1,\dots,\beta_n)}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}$ sind auch die singulären Gebilde des Differentialgleichungensystems.

In der Umgebung einer Stelle $(a_1,\dots,a_n)$ des singulären Gebildes $\psi(x_1,\dots,x_n) = 0$ ist ein Fundamentalsystem von m Integralen vorhanden, welche eine Entwicklung von der Form

$$y = \psi(x_1,\dots,x_n)^r \eta$$

oder von der Form

$$y = \psi(x_1,\dots,x_n)^r\{\eta_0 + \eta_1 \log\psi(x_1,\dots,x_n) + \dots\}$$

zulassen, wo unter η Functionen zu verstehen sind, welche sich in der Umgebung der Stelle $(a_1,\dots,a_n)$ eindeutig verhalten, allenfalls aber noch an den Stellen des singulären Gebildes $\psi(x_1,\dots,x_n) = 0$ unendlich

werden können. Von dem Verhalten der Integrale an den Schnittstellen mehrerer singulärer Gebilde sehen wir für jetzt ab.

Wir betrachten nun eine Klasse von Differentialgleichungensystemen (D), deren sämtliche Integrale sich in der Umgebung einer Stelle $(a_1, \ldots, a_n)$ eines singulären Gebildes $\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ regulär verhalten; ein solches System hat man z. B., wenn die Coefficienten des Systems (D) die Form haben

$$P_{a_1, \ldots, a_n}^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} = \frac{G_{a_1, \ldots, a_n}^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}}{\psi^{(\beta_1 + \ldots + \beta_n) - (a_1 + \ldots + a_n)}},$$

wo $G_{a_1, \ldots, a_n}^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}$ in eine Potenzreihe von $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ entwickelbar ist.

Dass sich die Integrale des Systems

$$\text{(D}')\qquad y^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)} = \sum_{(a)} \frac{G_{a_1, \ldots, a_n}^{(\beta_1, \ldots, \beta_n)}}{\psi^{(\beta_1 + \ldots + \beta_n) - (a_1 + \ldots + a_n)}} y^{(a_1, \ldots, a_n)}$$

in der Umgebung der Stelle $(a_1, \ldots, a_n)$ des singulären Gebildes $\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ regulär verhalten, erkennt man, indem man das System (D′) auf ein System totaler linearer Differentialgleichungen mit den m abhängigen Variablen $y^{(a_1, \ldots, a_n)}$ zurückführt.

Um die *notwendigen* Bedingungen für das Vorhandensein lauter regulärer Integrale aufzufinden, müsste die Theorie der totalen linearen Differentialgleichungen weiter geführt werden, wovon wir in der vorliegenden Arbeit absehen. Da nun feststeht, dass die Integrale von (D′) in der Umgebung der Stelle $(a_1, \ldots, a_n)$ des Gebildes $\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ die Form haben

$$y = \psi(x_1, \ldots, x_n)^r \eta$$

oder

$$y = \psi^r(\eta + \eta' \log \psi + \ldots),$$

wo $\eta, \eta', \ldots$ Potenzreihen von $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ darstellen, so können wir uns zur Berechnung der Exponenten r wenden.

Die wiederholte Differentiation des Ausdrucks $y = \psi^r \eta$ — ein Integral von dieser Form ist immer vorhanden — ergiebt

$$\frac{\partial^{a_1 + \ldots + a_n} y}{\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n}} = \psi^{r - (a_1 + \ldots + a_n)} \left\{ [r, a_1 + \ldots + a_n] \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right)^{a_1} \ldots \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_n}\right)^{a_n} \cdot \eta + \psi Q_{a_1, \ldots, a_n} \right\},$$

wobei $Q_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ ein aus den Ableitungen von ψ und η durch Addition und Multiplication gebildeter Ausdruck ist; ferner ist die Bezeichnung

$$[r\,,\,m] = r(r-1)\ldots(r-m+1)\,;\,[r\,,\,0] = 1.$$

angewandt. Durch Einsetzen in eine der Differentialgleichungen (D′) findet man, dass

$$[r\,,\,\beta_1+\ldots+\beta_n]\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^{\beta_1}\ldots\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}\equiv$$

$$\sum_{(\alpha)}[r\,,\,\alpha_1+\ldots+\alpha_n]\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\ldots\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\cdot P^{(\beta_1,\ldots,\beta_n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},\ \mathrm{mod}\ \psi$$

sein muss, da η als nicht durch ψ teilbar vorausgesetzt wird. Jede der m Differentialgleichungen des Systems (D′) liefert eine solche Congruenz. Setzt man für $(x_1\,,\ldots,\,x_n)$ irgend eine Stelle des Gebildes $\psi = 0$, so gehen die Congruenzen in Gleichungen für r über, die allerdings zum Teil auch Identitäten werden können. Die nicht identischen Gleichungen müssen eine Anzahl gemeinsamer Wurzeln r besitzen. Von der weiteren Ausführung, die den für das specielle System (A′) angestellten Betrachtungen ähnlich sein wird, sehen wir hier ab, ebenso von der Behandlung einiger anderen Fragen, welche durch die seitherigen Entwicklungen nahe gelegt werden. Es ist dies namentlich die Aufsuchung der notwendigen Bedingungen für das Vorhandensein lauter regulärer Integrale bei den verschiedenen Systemen linearer Differentialgleichungen, die uns seither begegnet sind, sowie die Frage nach dem Verhalten der Integrale der seither betrachteten Differentialgleichungen in der Umgebung einer Schnittstelle mehrerer singulärer Gebilde.

Besonders interessante specielle Systeme linearer partieller Differentialgleichungen sind die Differentialgleichungensysteme, welchen die hypergeometrischen Reihen mehrerer Veränderlichen genügen. Eine Reihe dieser Art ist z. B.

$$F(x_1\,,\ldots,\,x_n) = \sum_{(\lambda)} A_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n}, \qquad (\lambda_1,\ldots,\lambda_n=0,\ldots\infty)$$

$$A_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} = \frac{\prod\limits_{\alpha}(a_\alpha\,,\,u_{\alpha 1}\lambda_1+\ldots+u_{\alpha n}\lambda_n)}{\prod\limits_{\beta}(b_\beta\,,\,v_{\beta 1}\lambda_1+\ldots+v_{\beta n}\lambda_n)}, \qquad (\alpha=1,\ldots,\rho\,;\,\beta=1,\ldots,\sigma)$$

wobei die Bezeichnung

$$(a\,,\,m) = a(a+1)\dots(a+m-1)$$

gebraucht ist und

$$u_{\alpha 1}\,,\,\dots\,,\,u_{\alpha n}$$

$$v_{\beta 1}\,,\,\dots\,,\,v_{\beta n}$$

ganze positive Zahlen von der Art sind, dass

$$\sum_\alpha u_{\alpha 1} = \dots = \sum_\alpha u_{\alpha n} = \sum_\beta v_{\beta 1} = \dots = \sum_\beta v_{\beta n} = \mu$$

ist. Es lässt sich nachweisen, dass diese Reihe in einem gewissen Bereiche von endlicher Ausdehnung convergiert, und dass sie, falls der Nenner von $A_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}$ die Factoren $(1\,,\,\lambda_1)\,,\,\dots\,,\,(1\,,\,\lambda_n)$ enthält, einem System linearer partieller Differentialgleichungen von der Form

$$\sum_{(\nu)} \left(a^{(i)}_{\nu_1,\dots,\nu_n} x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} - b^{(i)}_{\nu_1,\dots,\nu_n} x_1^{\nu_1} \dots x_i^{\nu_i - 1} \dots x_n^{\nu_n}\right) . \frac{\partial^{\nu_1+\dots+\nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} = 0$$

$$(i = 1, \dots, n\,;\, \nu_1 + \dots + \nu_n \leqq \mu)$$

genügt, wo $a^{(i)}_{\nu_1,\dots,\nu_n}$, $b^{(i)}_{\nu_1,\dots,\nu_n}$ ganze Functionen der a_α und b_β sind.

Es bietet sich hier die Aufgabe dar, die Theorie der Reihenentwicklung der Integrale eines Systems linearer partieller Differentialgleichungen in einer solchen Form darzustellen, dass sie auf die Differentialgleichungensysteme der hypergeometrischen Reihen angewandt werden kann. Die aus der oben eingeführten Reihe hervorgehenden Functionen sind im Falle $n = 1$ als höhere hypergeometrische Functionen von den Herren THOMÆ (Math. Ann. Bd. **2**), GOURSAT (Ann. de l'Ec. norm. 1883) und POCHHAMMER (Crelles Journal Bd. **102**) untersucht worden.

Rehbach (Hessen), Mai 1888.

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE[1]

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI

À STOCKHOLM.

§ 1.

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), &\qquad \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\
B\frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma''), &\qquad \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\
C\frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), &\qquad \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'.
\end{aligned}
$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

[1] Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de gravité du corps considéré dans un système de coordonnées, dont l'origine est au point fixe et dont la direction coïncide avec celle des axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie.

Jusqu'à présent on n'était parvenu à intégrer ces équations que dans deux cas particuliers:

1) Le cas de Poisson (ou d'Euler) où l'on a $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,

2) Le cas de Lagrange où l'on a $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$.

Dans ces deux cas l'intégration s'opère à l'aide des fonctions $\vartheta(u)$ dont l'argument est une fonction entière linéaire du temps.

Les six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ sont dans ces deux cas des fonctions uniformes du temps, n'ayant d'autres singularités que des pôles pour toutes les valeurs finies de la variable.

Les intégrales des équations différentielles considérées conservent-elles cette propriété dans le cas général?

Si tel était le cas il faudrait pouvoir intégrer ces équations différentielles à l'aide de séries de la forme

$$(2)\qquad \begin{aligned} p &= t^{-n_1}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots), \\ q &= t^{-n_2}(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \ldots), \\ r &= t^{-n_3}(r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \ldots), \\ \gamma &= t^{-m_1}(f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \ldots), \\ \gamma' &= t^{-m_2}(g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \ldots), \\ \gamma'' &= t^{-m_3}(h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \ldots), \end{aligned}$$

où $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3$ désignent des nombres entiers positifs, et ces séries, pour pouvoir représenter le système général d'intégrales des équations différentielles considérées, devraient contenir *cinq* constantes arbitraires.

Il faut donc examiner si une pareille intégration est possible.

On s'assure facilement, en comparant les exposants des premiers termes dans les membres gauches et dans les membres droits des équations considérées que l'on doit avoir

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1, \qquad m_1 = m_2 = m_3 = 2.$$

On trouve ensuite, en posant par brièveté

$$A_1 = B - C, \qquad B_1 = C - A, \qquad C_1 = A - B$$

et en supposant l'unité de longueur choisie de manière à ce que l'on ait $Mg = 1$, que les coefficients p_0, q_0, r_0 doivent satisfaire aux équations suivantes

$$(3) \qquad \begin{aligned} -Ap_0 &= A_1 q_0 r_0 + y_0 h_0 - z_0 g_0, & -2f_0 &= r_0 g_0 - q_0 h_0, \\ -Bq_0 &= B_1 r_0 p_0 + z_0 f_0 - x_0 h_0, & -2g_0 &= p_0 h_0 - r_0 f_0, \\ -Cr_0 &= C_1 p_0 q_0 + x_0 g_0 - y_0 f_0, & -2h_0 &= q_0 f_0 - p_0 g_0. \end{aligned}$$

Pour que les trois dernières de ces équations puissent être satisfaites par des valeurs de f_0, g_0, h_0 différentes de zéro, il faut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & r_0 & -q_0 \\ -r_0 & 2 & p_0 \\ q_0 & -p_0 & 2 \end{vmatrix} = 2(4 + p_0^2 + q_0^2 + r_0^2)$$

soit nul.

Si l'on ajoute les trois premières des équations (3) après les avoir multipliées respectivement par Ap_0, Bq_0, Cr_0, on trouve

$$(4) \qquad \begin{aligned} &A^2 p_0^2 + B^2 q_0^2 + C^2 r_0^2 \\ &= x_0(Bq_0 h_0 - Cr_0 g_0) + y_0(Cr_0 f_0 - Ap_0 h_0) + z_0(Ap_0 g_0 - Aq_0 f_0); \end{aligned}$$

mais des trois dernières des équations (3) il résulte

$$(5) \qquad \begin{aligned} 2(Bq_0 h_0 - Cr_0 g_0) &= p_0(Ap_0 f_0 + Bq_0 g_0 + Cr_0 h_0) - f_0(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2), \\ 2(Cr_0 f_0 - Ap_0 h_0) &= q_0(Ap_0 f_0 + Bq_0 g_0 + Cr_0 h_0) - g_0(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2), \\ 2(Ap_0 g_0 - Bq_0 f_0) &= r_0(Ap_0 f_0 + Bq_0 g_0 + Cr_0 h_0) - h_0(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2). \end{aligned}$$

Les six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ devant satisfaire aux deux relations algébriques

$$\begin{gathered} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') + l_1, \\ Ax_0 p + By_0 q + Cz_0 r = l, \end{gathered}$$

l et l_1 désignant des constantes d'intégration, il faut que l'on ait

$$Ap_0f_0 + Bq_0g_0 + Cr_0h_0 = 0,$$

$$x_0f_0 + y_0g_0 + z_0h_0 = \frac{1}{2}(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2).$$

Il résulte donc des équations (4) et (5)

$$A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2 = -\frac{1}{4}(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2)^2.$$

Il faut maintenant distinguer deux cas.

1[r] *cas.* Supposons qu'aucune des quantités

$$A_1 = B - C, \qquad B_1 = C - A, \qquad C_1 = A - B$$

ne soit nulle. Si l'on pose alors

$$\frac{1}{2}(p_0^2 + q_0^2 + r_0^2) = \lambda_0,$$

$$\frac{1}{2}(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2) = \lambda,$$

$$\frac{1}{2}(A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2) = \lambda_1,$$

on a

$$\frac{1}{2}p_0^2 = -\frac{BC\lambda_0 - (B + C)\lambda + \lambda_1}{B_1C_1},$$

$$\frac{1}{2}q_0^2 = -\frac{CA\lambda_0 - (C + A)\lambda + \lambda_1}{C_1A_1}.$$

$$\frac{1}{2}r_0^2 = -\frac{AB\lambda_0 - (A + B)\lambda + \lambda_1}{A_1B_1}.$$

Or nous avons trouvé

$$\lambda_0 = -2, \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{2}\lambda^2.$$

On a donc

$$(6)\qquad \begin{aligned} p_0^2 &= \frac{4BC + 2(B + C)\lambda + \lambda^2}{B_1C_1} = \frac{(2B + \lambda)(2C + \lambda)}{B_1C_1}, \\ q_0^2 &= \frac{4CA + 2(C + A)\lambda + \lambda^2}{C_1A_1} = \frac{(2C + \lambda)(2A + \lambda)}{C_1A_1}, \\ r_0^2 &= \frac{4AB + 2(A + B)\lambda + \lambda^2}{A_1B_1} = \frac{(2A + \lambda)(2B + \lambda)}{A_1B_1}. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute les trois premières des équations (3) après les avoir multipliées respectivement par x_0, y_0, z_0, on trouve

$$(7)\qquad x_0(Ap_0 + A_1q_0r_0) + y_0(Bq_0 + B_1r_0p_0) + z_0(Cr_0 + C_1p_0q_0) = 0.$$

Cette équation sert à déterminer la quantité λ.

Les trois quantités f_0, g_0, h_0 doivent satisfaire aux trois équations suivantes

$$\begin{aligned} p_0f_0 + q_0g_0 + r_0h_0 &= 0, \\ Ap_0f_0 + Bq_0g_0 + Cr_0h_0 &= 0, \\ x_0f_0 + y_0g_0 + z_0h_0 &= \lambda, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en posant

$$\mu = -(A_1x_0q_0r_0 + B_1y_0r_0p_0 + C_1z_0p_0q_0) = Ax_0p_0 + By_0q_0 + Cz_0r_0,$$

$$(8)\qquad \begin{aligned} f_0 &= -A_1q_0r_0\frac{\lambda}{\mu}, \\ g_0 &= -B_1r_0p_0\frac{\lambda}{\mu}, \\ h_0 &= -C_1p_0q_0\frac{\lambda}{\mu}. \end{aligned}$$

Les équations (6) et (7) déterminent les quantités p_0, q_0, r_0 au signe près.

Si l'on pose

$$a = \sqrt{\frac{2A + \lambda}{A_1}}, \qquad b = \sqrt{\frac{2B + \lambda}{B_1}}, \qquad c = \sqrt{\frac{2C + \lambda}{C_1}}$$

en fixant le signe des quantités a, b, c d'une manière arbitraire, on trouve que pour satisfaire à toutes les équations (3) il faut poser

$$p_0 = bc,$$

$$q_0 = ca,$$

$$r_0 = -ab.$$

L'équation (7) peut donc être écrite de la manière suivante

$$x_0(A+\lambda)p_0 + y_0(B+\lambda)q_0 + z_0(C+\lambda)r_0 = 0$$

ou bien

$$x_0(A+\lambda)bc + y_0(B+\lambda)ca - z_0(C+\lambda)ab = 0.$$

2[d] *cas.* Supposons maintenant que l'une des trois quantités A_1, B_1, C_1, (p. ex. C_1) soit égale à zéro. (Dans ce cas on peut toujours aussi supposer $y_0 = 0$.) Pour satisfaire aux deux équations

$$A(p_0f_0 + q_0g_0) + Cr_0h_0 = 0,$$

$$p_0f_0 + q_0g_0 + r_0h_0 = 0,$$

il faut nécessairement que l'on ait

$$r_0h_0 = 0.$$

Les équations (3) admettent donc deux systèmes de solutions, qui peuvent s'écrire, en désignant par $\varepsilon \pm 1$,

I. $$p_0 = \varepsilon i \cdot \frac{2C}{A-2C} \cdot \frac{z_0}{x_0}, \qquad f_0 = -\frac{2C}{x_0},$$

$$q_0 = \varepsilon i p_0, \qquad g_0 = -i\varepsilon \frac{2C}{x_0},$$

$$r_0 = 2\varepsilon i, \qquad h_0 = 0.$$

II. $$p_0 = 0, \qquad f_0 = -\frac{2A}{x_0 - i\varepsilon z_0},$$

$$q_0 = 2\varepsilon i, \qquad g_0 = 0,$$

$$r_0 = 0, \qquad h_0 = \varepsilon i \frac{2A}{x_0 - i\varepsilon z_0}.$$

Les coefficients

$$p_0 , q_0 , r_0 , f_0 , g_0 , h_0$$

une fois determinés, on obtient les coefficients

$$p_m , q_m , r_m , f_m , g_m , h_m$$

en résolvant le système d'équations linéaires suivantes

$$(m - 1)Ap_m - A_1(q_0r_m + r_0q_m) - z_0g_m + y_0h_m = P_m,$$
$$(m - 1)Bq_m - B_1(r_0p_m + p_0r_m) - x_0h_m + z_0f_m = Q_m,$$
$$(m - 1)Cr_m - C_1(p_0q_m + q_0p_m) - y_0f_m + x_0g_m = R_m,$$
$$(m - 2)f_m - r_0g_m + q_0h_m - g_0r_m + h_0q_m = F_m,$$
$$(m - 2)g_m - p_0h_m + r_0f_m - h_0p_m + f_0r_m = G_m,$$
$$(m - 2)h_m - q_0f_m + p_0g_m - f_0q_m + g_0p_m = H_m.$$

Les membres droits de ces équations sont des fonctions entières des coefficients $p_\mu , q_\mu , r_\mu , f_\mu , g_\mu , h_\mu$ dans lesquels l'index $\mu < m$.

Afin que les séries

$$p = t^{-1}\sum p_m t^m, \qquad \gamma = t^{-2}\sum f_m t^m,$$
$$q = t^{-1}\sum q_m t^m, \qquad \gamma' = t^{-2}\sum g_m t^m,$$
$$r = t^{-1}\sum r_m t^m, \qquad \gamma'' = t^{-2}\sum h_m t^m,$$

contiennent le nombre suffisant de constantes arbitraires il faut que le déterminant de ces équations linéaires, lequel est une fonction entière du 6me degré en m, s'évanouisse pour cinq valeurs différentes de m égales à des nombres entiers positifs. De plus il faut que les quantités P_m, $Q_m , R_m , F_m , G_m , H_m$ soient telles que les équations précédentes soient compatibles entre elles.

En effectuant les calculs je me suis assurée que ces conditions ne sont pas remplies dans le cas général; mais que, outre les deux cas déjà connus, elles sont encore remplies dans un cas nouveau, où les constantes satisfont aux équations suivantes

$$A = B = 2C, \qquad z_0 = 0.$$

C'est ce cas-là que je me propose d'étudier dans les paragraphes suivants.

§ 2.

Dans le cas que nous allons considérer, on a

$$A = B = 2C, \qquad z_0 = 0.$$

Par une rotation des axes de coordonnées dans le plan de xy et par un choix convenable de l'unité de longueur, on peut toujours effectuer, que l'on ait de plus dans ce cas

$$y_0 = 0, \qquad C = 1.$$

Si je pose alors

$$c_0 = Mgx_0,$$

les équations différentielles que nous avons à considérer sont les suivantes:

$$(1)\qquad \begin{cases} 2\dfrac{dp}{dt} = qr, & \dfrac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', \\ 2\dfrac{dq}{dt} = -pr - c_0\gamma'', & \dfrac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma, \\ \dfrac{dr}{dt} = c_0\gamma', & \dfrac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'. \end{cases}$$

Les trois intégrales algébriques du cas général, sont dans ce cas-ci:

$$(2)\qquad \begin{cases} 2(p^2 + q^2) + r^2 = 2c_0\gamma + 6l_1, \\ 2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = 2l, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1. \end{cases}$$

Outre ces trois intégrales algébriques on en trouve facilement encore une quatrième.

On a en effet (en posant $i = \sqrt{-1}$),

$$2\frac{d}{dt}(p + qi) = -ri(p + qi) - c_0 i\gamma'',$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma + \gamma' i) = -ri(\gamma + \gamma' i) + \gamma'' i(p + qi).$$

Par conséquent

$$\frac{d}{dt}\{(p + qi)^2 + c_0(\gamma + \gamma' i)\} = - ri\{(p + qi)^2 + c_0(\gamma + \gamma' i)\},$$

et de même

$$\frac{d}{dt}\{(p - qi)^2 + c_0(\gamma - \gamma' i)\} = \quad ri\{(p - qi)^2 + c_0(\gamma - \gamma' i)\},$$

d'où il suit

$$\frac{d}{dt} lg\{(p + qi)^2 + c_0(\gamma + i\gamma')\} + \frac{d}{dt} lg\{(p - qi)^2 + c_0(\gamma - i\gamma')\} = 0,$$

et, en intégrant,

$$(3) \qquad \{(p + qi)^2 + c_0(\gamma + i\gamma')\}\{(p - qi)^2 + c_0(\gamma - i\gamma')\} = k^2,$$

en désignant par k une constante réelle arbitraire.

Posons

$$x_1 = p + qi, \qquad y_1 = \gamma + \gamma' i,$$
$$x_2 = p - qi, \qquad y_2 = \gamma - \gamma' i,$$

$$\xi_1 = (p + qi)^2 + c_0(\gamma + i\gamma') = x_1^2 + c_0 y_1,$$
$$\xi_2 = (p - qi)^2 + c_0(\gamma - i\gamma') = x_2^2 + c_0 y_2.$$

L'équation (3) s'écrit alors

$$\xi_1 \xi_2 = k^2.$$

Des équations (2) on tire les valeurs de $r^2, r\gamma'', \gamma''^2$ exprimées en x_1, x_2, ξ_1, ξ_2;

$$(4) \qquad \begin{cases} r^2 = 6l_1 - (x_1 + x_2)^2 + \xi_1 + \xi_2, \\ c_0 r\gamma'' = 2lc_0 + x_1 x_2(x_1 + x_2) - x_2\xi_1 - x_1\xi_2, \\ c_0^2\gamma''^2 = c_0^2 - k^2 - x_1^2 x_2^2 + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2. \end{cases}$$

ou bien, en posant

$$\mathfrak{A} = 6l_1 - (x_1 + x_2)^2,$$
$$\mathfrak{B} = 2lc_0 + x_1 x_2(x_1 + x_2),$$
$$\mathfrak{C} = c_0^2 - k^2 - x_1^2 x_2^2,$$

(4′)
$$\begin{cases} r^2 = \mathfrak{A} + \xi_1 + \xi_2, \\ c_0 r\gamma'' = \mathfrak{B} - x_2\xi_1 - x_1\xi_2, \\ c_0^2\gamma''^2 = \mathfrak{C} + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2. \end{cases}$$

Les quatre quantités x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 satisfont donc aux deux relations algébriques suivantes

(5)
$$\xi_1\xi_2 = k^2,$$
$$(\mathfrak{A} + \xi_1 + \xi_2)(\mathfrak{C} + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2) - (\mathfrak{B} - x_2\xi_1 - x_1\xi_2)^2 = 0.$$

Posons

$$R(x_1) = \mathfrak{A}x_1^2 + 2\mathfrak{B}x_1 + \mathfrak{C} = -x_1^4 + 6l_1x_1^2 + 4lc_0x_1 + c_0^2 - k^2,$$
$$R(x_2) = \mathfrak{A}x_2^2 + 2\mathfrak{B}x_2 + \mathfrak{C} = -x_2^4 + 6l_1x_2^2 + 4lc_0x_2 + c_0^2 - k^2,$$
$$R_1(x_1x_2) = \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2 = -6l_1x_1^2x_2^2 - (c_0^2 - k^2)(x_1 + x_2)^2$$
$$- 4lc_0(x_1 + x_2)x_1x_2 + 6l_1(c_0^2 - k^2) - 4l^2c_0^2.$$

Les équations (5), développées, deviennent alors

(5′)
$$\xi_1\xi_2 = k^2,$$
$$R(x_2)\xi_1 + R(x_1)\xi_2 + R_1(x_1x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 = 0.$$

Posons de plus

$$R(x_1x_2) = \mathfrak{A}x_1x_2 + \mathfrak{B}(x_1 + x_2) + \mathfrak{C} = -x_1^2x_2^2 + 6l_1x_1x_2$$
$$+ 2lc_0(x_1 + x_2) + c_0^2 - k^2;$$

on a alors l'identité

(6)
$$R(x_1)R(x_2) - R(x_1x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 R_1(x_1x_2).$$

Posons:

$$(7)\quad W^2 = \{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2\}^2 - 4k^2R(x_1)R(x_2)$$
$$= \{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2\}^2 - 4k^2\{R(x_1x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2R_1(x_1x_2)\}$$
$$= \{R_1(x_1x_2) - k^2(x_1 - x_2)^2\}^2 - 4k^2R(x_1x_2)^2$$
$$=\{R_1(x_1x_2)-k^2(x_1-x_2)^2-2kR(x_1x_2)\}\{R_1(x_1x_2)-k^2(x_1-x_2)^2+2kR(x_1x_2)\}.$$

Vu que d'après l'identité (6) on a

$$k^2(x_1 - x_2)^2 + 2kR(x_1x_2) - R_1(x_1x_2)$$
$$= \frac{1}{(x_1-x_2)^2}\{k^2(x_1 - x_2)^4 + 2k(x_1 - x_2)^2R(x_1x_2) + R(x_1x_2)^2 - R(x_1)R(x_2)\}$$
$$= \frac{1}{(x_1-x_2)^2}\{[k(x_1 - x_2)^2 + R(x_1x_2)]^2 - R(x_1)R(x_2)\}$$
$$= (x_1 - x_2)^2\left\{\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} + k\right\}\left\{\frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} + k\right\},$$

et de même

$$k^2(x_1 - x_2)^2 - 2kR(x_1x_2) - R_1(x_1x_2)$$
$$= (x_1 - x_2)^2\left\{\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} - k\right\}\left\{\frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} - k\right\},$$

on peut écrire

$$(7')\quad W^2 = (x_1 - x_2)^4\left\{\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} - k\right\}\left\{\frac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} + k\right\}$$
$$\times\left\{\frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} + k\right\}\left\{\frac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} - k\right\},$$

et on a alors

$$(8)\qquad \begin{cases} \xi_1 = -\dfrac{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 - W}{2R(x_2)}, \\[2ex] \xi_2 = -\dfrac{R_1(x_1x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 + W}{2R(x_1)}. \end{cases}$$

Au lieu des deux variables x_1 et x_2 introduisons maintenant deux variables nouvelles s_1 et s_2, définies par les équations

$$(9)\qquad \begin{cases} s_1 = \dfrac{R(x_1x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2} + \dfrac{1}{2}l_1, \\[2ex] s_2 = \dfrac{R(x_1x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2} + \dfrac{1}{2}l_1; \end{cases}$$

s_1 et s_2 sont, comme on le voit, les deux racines de l'équation algébrique du second degré

$$(x_1 - x_2)^2\left(s - \frac{1}{2}l_1\right)^2 - R(x_1x_2)\left(s - \frac{1}{2}l_1\right) - \frac{1}{4}R_1(x_1x_2) = 0.$$

On a alors

$$W^2 = (x_1 - x_2)^4(2s_1 - l_1 - k)(2s_1 - l_1 + k)(2s_2 - l_1 - k)(2s_2 - l_1 + k);$$

ou bien, en posant

$$k_1 = \frac{l_1 + k}{2}, \qquad k_2 = \frac{l_1 - k}{2},$$

on a

$$(10)\qquad W^2 = 16(x_1 - x_2)^4(s_1 - k_1)(s_2 - k_1)(s_1 - k_2)(s_2 - k_2),$$

$$(11)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{R(x_2)}\left\{\left[\sqrt{(s_1 - k_1)(s_2 - k_1)} + \sqrt{(s_1 - k_2)(s_2 - k_2)}\right]^2 - k^2\right\}, \\[2ex] \xi_2 = \dfrac{(x_1 - x_2)^2}{R(x_1)}\left\{\left[\sqrt{(s_1 - k_1)(s_2 - k_1)} - \sqrt{(s_1 - k_2)(s_2 - k_2)}\right]^2 - k^2\right\}. \end{cases}$$

Établissons maintenant les équations différentielles, qui définissent ces deux variables nouvelles s_1 et s_2 en fonction du temps.

En posant

$$(12)\qquad \begin{aligned} g_2 &= k^2 - c_0^2 + 3l_1^2, \\ g_3 &= l_1(k^2 - c_0^2 - l_1^2) + l^2c_0^2, \end{aligned}$$

$$S_1 = 4s_1^3 - g_2s_1 - g_3, \qquad S_2 = 4s_2^3 - g_2s_2 - g_3,$$

on trouve

$$\sqrt{S_1} = \frac{R(x_1) - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)R'(x_1)}{(x_1 - x_2)^3}\sqrt{R(x_2)} - \frac{R(x_2) + \frac{1}{4}(x_1 - x_2)R'(x_2)}{(x_1 - x_2)^3}\sqrt{R(x_1)},$$

$$\sqrt{S_2} = \frac{R(x_1) - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)R'(x_1)}{(x_1 - x_2)^3}\sqrt{R(x_2)} + \frac{R(x_2) + \frac{1}{4}(x_1 - x_2)R'(x_2)}{(x_1 - x_2)^3}\sqrt{R(x_1)},$$

(13)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}} &= \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}, \\ \frac{ds_2}{\sqrt{S_2}} &= -\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}. \end{aligned}\right.$$

Des équations différentielles (1) il suit, vu que $x_1 = p + qi$, et $x_2 = p - qi$,

(14)
$$\left\{\begin{aligned} 2i\frac{dx_1}{dt} &= rx_1 + c_0\gamma'', \\ -2i\frac{dx_2}{dt} &= rx_2 + c_0\gamma''. \end{aligned}\right.$$

Par conséquent

$$-4\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = r^2x_1^2 + 2rc_0\gamma''x_1 + c_0^2\gamma''^2$$

ou bien, en écrivant au lieu de r^2, $c_0r\gamma''$, $c_0^2\gamma''^2$ leurs valeurs, définies par les équations (4'),

$$-4\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = x_1^2(\mathfrak{A} + \xi_1 + \xi_2) + 2x_1(\mathfrak{B} - x_2\xi_1 - x_1\xi_2) + \mathfrak{C} + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2$$
$$= R(x_1) + (x_1 - x_2)^2\xi_1.$$

De la même manière on trouve

$$-4\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = R(x_2) + (x_1 - x_2)^2\xi_2$$

et

$$4\frac{dx_1}{dt}\cdot\frac{dx_2}{dt} = r^2x_1x_2 + rc_0\gamma''(x_1 + x_2) + c_0^2\gamma''^2$$

$$= x_1x_2(\mathfrak{A} + \xi_1 + \xi_2) + (x_1 + x_2)(\mathfrak{B} - x_2\xi_1 - x_1\xi_2) + \mathfrak{C} + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2$$
$$= R(x_1x_2).$$

En élevant au carré les deux membres de la première des équations (13), on trouve

$$-4\cdot\frac{1}{S_1}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 = -\frac{4}{R(x_1)}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 - \frac{4}{R(x_2)}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 - \frac{8}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt}$$

$$= 2 + (x_1 - x_2)^2\left(\frac{\xi_1}{R(x_1)} + \frac{\xi_2}{R(x_2)}\right) - 2\,\frac{R(x_1 x_2)}{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}},$$

ou bien, par suite des équations (5′),

$$-4\left(\frac{1}{\sqrt{S_1}}\frac{ds_1}{dt}\right)^2$$

$$= 2 - \frac{(x_1 - x_2)^2}{R(x_1).R(x_2)}\{R_1(x_1 x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2\} - \frac{2R(x_1 x_2)}{\sqrt{R(x_1)}.\sqrt{R(x_2)}}$$

$$= \frac{R(x_1).R(x_2) + \overline{R(x_1 x_2)}^2 - 2R(x_1 x_2)\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)} - k^2(x_1 - x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)^4}{R(x_1).R(x_2)}\left\{\frac{[R(x_1 x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}]^2}{(x_1 - x_2)^4} - k^2\right\}$$

$$= 4\frac{(x_1 - x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)}\left(\frac{R(x_1 x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2} - \frac{1}{2}k\right)\left(\frac{R(x_1 x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2} + \frac{1}{2}k\right)$$

$$= 4\frac{(x_1 - x_2)^4}{R(x_1).R(x_2)}(s_1 - k_1)(s_1 - k_2).$$

Mais on a

$$s_2 - s_1 = \frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2}.$$

Par conséquent

$$-\frac{1}{S_1}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 = \frac{(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)}{(s_1 - s_2)^2}.$$

Posons

$$R_1(s) = -S(s - k_1)(s - k_2) = -4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)(s - k_1)(s - k_2);$$

on a alors

$$\frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} = \frac{dt}{s_1 - s_2}.$$

On trouve tout à fait de la même manière

$$\frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}} = \frac{dt}{s_2 - s_1}.$$

D'où il suit

$$(15) \qquad \begin{aligned} 0 &= \frac{ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}, \\ dt &= \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R_1(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R_1(s_2)}}. \end{aligned}$$

$R_1(s)$ étant un polynôme du cinquième degré, et les racines de l'équation $R_1(s) = 0$ étant toutes différentes entre elles, les équations différentielles (15) nous conduisent aux fonctions ultraelliptiques, ou autrement dit, aux fonctions de M. ROSENHAIN.

Cherchons d'abord les expressions des six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ exprimées à l'aide des deux quantités s_1 et s_2. Nous y arriverons à l'aide de formules, que j'emprunte à un cours inédit de M. WEIERSTRASS sur les fonctions elliptiques, et dont une partie se trouvent aussi développées dans le *Traité des fonctions elliptiques* etc. de M. HALPHEN et dans les *Formeln und Lehrsätze* etc. de M. SCHWARTZ.

§ 3.

Soit

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

un polynôme du quatrième degré de la variable x. Les coefficients A, B, C, B', A' sont des constantes, assujetties à la condition que $R(x)$ n'ait point de diviseur quadratique. Soit u une seconde variable, liée à x par l'équation différentielle

$$(1) \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

La relation la plus générale entre u et x peut être exprimée de la manière suivante.

Posons

$$(2)\qquad \begin{aligned} g_2 &= AA' - 4BB' + 3C^2, \\ g_3 &= ACA' + 2BCB' - AB'B' - A'BB - C^3, \\ D &= B^2 - AC, \qquad E = A^2B' - 3ABC + 2B^3; \end{aligned}$$

on a alors

$$(3)\qquad 4\left(\frac{D}{A}\right)^3 - g_2\frac{D}{A} - g_3 = \frac{E^2}{A^3}.$$

Nous désignerons par $\wp(u)$ la fonction $\wp(u, g_2, g_3)$, et par $\bar{\wp}(u)$ la fonction $\wp(u, g_2, -g_3)$.[1] En vertu de l'équation (3) on peut définir un argument w tel, que, le signe de $\sqrt{A}$ étant fixé arbitrairement, les deux équations

$$(4)\qquad \wp(w) = \frac{D}{A}, \qquad \wp'(w) = -\frac{E}{A\sqrt{A}}$$

aient lieu simultanément. Posons

$$\begin{aligned} \varphi_0(u) &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}}\frac{\wp'u + \wp'w}{\wp u - \wp w} \\ &= -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\sigma'(u-w)}{\sigma(u-w)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + \frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}\right\}. \end{aligned}$$

L'expression la plus générale de x en fonction de u est alors

$$(6)\qquad x = \varphi_0(u - u_0)$$

où u_0 désigne une constante arbitraire. (Pour $u = u_0$, $x = \infty$ et $\frac{1}{x^2}\frac{dx}{du} = \sqrt{A}$.) On a

$$\varphi_0(-u + w) = \varphi_0(u), \qquad \varphi_0\left(u + \frac{w}{2}\right) = \varphi_0\left(-u + \frac{w}{2}\right)$$

---

[1] Voir Halphen, *Traité des fonctions elliptiques.*
Schwartz, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.*

et par conséquent, si l'on pose

$$(8)\quad \varphi(u, w) - \varphi_0\left(u + \frac{w}{2}\right) = -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\sigma'}{\sigma}\left(u - \frac{w}{2}\right) - \frac{\sigma'}{\sigma}\left(u + \frac{w}{2}\right) + \frac{\sigma'}{\sigma}(w)\right\}$$

$$= -\frac{B}{A} + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\frac{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp u - \wp\left(\frac{w}{2}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}\right\}.$$

$\varphi(u, w)$ est une fonction *paire* de u.

Les équations (4) subsistent sans changement, si l'on ajoute à w une période quelconque de la fonction $\wp(u)$. Si nous désignons par conséquent par $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ une paire *quelconque* de périodes primitives de la fonction $\wp(u)$, et si de toutes les valeurs de w (en nombre infini) qui satisfont aux équations (4), nous fixons une arbitrairement, les quatre expressions

$$\varphi(u, w), \varphi(u, w + 2\tilde{\omega}), \varphi(u, w + 2\tilde{\omega} + 2\tilde{\omega}'), \varphi(u, w + 2\tilde{\omega})$$

représenteront *quatre fonctions paires, différentes* de u, qui toutes, mises à la place de x, satisfont à l'équation différentielle (1). En effet si 2Ω et $2\Omega'$ sont deux périodes quelconques de la fonction $\wp(u)$, il résulte de l'équation (8)

$$(9)\quad \begin{aligned} \varphi(u, w + 2\Omega) &= \varphi(u + \Omega, w) \\ \varphi(u, w + 2\Omega') &= \varphi(u + \Omega', w). \end{aligned}$$

Pour que l'équation

$$\varphi(u, w + 2\Omega) = \varphi(u, w + 2\Omega')$$

puisse subsister pour toutes les valeurs de u, il faut donc que l'on ait

$$\varphi(u + \Omega, w) = \varphi(u + \Omega', w),$$

$$\varphi(u + \Omega' - \Omega, w) = \varphi(u, w),$$

c'est à dire $\Omega' - \Omega$ doit être une période de la fonction $\varphi(u)$ et par conséquent, (en vue de la dernière des équations (8)) $\Omega' - \Omega$ doit être aussi une période de $\wp u$.

Si tel n'est pas le cas, les deux fonctions $\varphi(u, w + 2\Omega)$ et $\varphi(u, w + 2\Omega')$ ne sont pas identiques. On en conclut donc que les quatre fonctions précitées,

$$\varphi(u, w), \varphi(u, w + 2\tilde{\omega}), \varphi(u, w + 2\tilde{\omega} + 2\tilde{\omega}'), \varphi(u, w + 2\tilde{\omega}'),$$

sont toutes les quatre différentes entre elles.

Mais il n'existe en tout que quatre fonctions *paires* de u, qui, mises à la place de x, satisfont à l'équation différentielle (1); ces quatre fonctions se distinguent par là, que pour $u = 0$ chacune d'elle devient égale à l'une des quatre racines de l'équation

$$R(x) = 0.$$

Ces quatre fonctions doivent donc être identiques avec les quatre fonctions paires précitées, et, en vertu des équations (9) on peut aussi les écrire de la manière suivante:

$$\varphi(u, w), \varphi(u + \tilde{\omega}, w), \varphi(u + \tilde{\omega} + \tilde{\omega}', w), \varphi(u + \tilde{\omega}', w).$$

Si nous posons

$$a = \varphi(0, w), \qquad a_1 = \varphi(\tilde{\omega}, w) = \varphi(0, w + 2\tilde{\omega}),$$
$$a_2 = \varphi(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}', w) = \varphi(0, w + 2\tilde{\omega} + 2\tilde{\omega}'),$$
$$a_3 = \varphi(\tilde{\omega}', w) = \varphi(0, w + 2\tilde{\omega}').$$

les quatre quantités a, a_1, a_2, a_3 représentent les 4 racines différentes de l'équation $R(x) = 0$ et l'on a

$$a = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\wp''\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)}, \qquad a_2 = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\wp''\left(\frac{w}{2} + \tilde{\omega} + \tilde{\omega}'\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2} + \tilde{\omega} + \tilde{\omega}'\right)},$$

$$a_1 = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\wp''\left(\frac{w}{2} + \tilde{\omega}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2} + \tilde{\omega}\right)}, \qquad a_3 = -\frac{B}{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{\wp''\left(\frac{w}{2} + \tilde{\omega}'\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2} + \tilde{\omega}'\right)}.$$

En posant $\wp(\tilde{\omega}) = e_1$, $\wp(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}') = e_2$, $\wp(\tilde{\omega}') = e_3$, les relations suivantes ont lieu pour chaque valeur de l'argument u,

$$\wp\left(\frac{u}{2}\right) = -\frac{(e_2^2 - e_3^2)\sigma_1 u + (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2 u + (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3 u}{(e_2 - e_3)\sigma_1 u + (e_3 - e_1)\sigma_2 u + (e_1 - e_2)\sigma_3 u},$$

$$\wp'\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{-2(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\sigma u}{(e_2 - e_3)\sigma_1 u + (e_3 - e_1)\sigma_2 u + (e_1 - e_2)\sigma_3 u},$$

$$\frac{\wp''\left(\frac{u}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{u}{2}\right)} = -2 \cdot \frac{(e_2 - e_3)\sigma_2 u \sigma_3 u + (e_3 - e_1)\sigma_3 u \sigma_1 u + (e_1 - e_2)\sigma_1 u \sigma_2 u}{\sigma u[(e_2 - e_3)\sigma_1 u + (e_3 - e_1)\sigma_2 u + (e_1 - e_2)\sigma_3 u]}$$

$$= -2\frac{\sigma_1 u + \sigma_2 u + \sigma_3 u}{\sigma u}.\ [1]$$

On a de plus

$$\frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_1}, \qquad \frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_2}, \qquad \frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_3}.$$

Pour chaque valeur déterminée de w, les signes correspondants des racines carrées dans ces formules sont aussi parfaitement déterminés, et l'on a

$$\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} \cdot \sqrt{\frac{D}{A} - e_2} \cdot \sqrt{\frac{D}{A} - e_3} = -\frac{1}{2}\wp'(w) = \frac{E}{2A\sqrt{A}}.$$

En vertu de ces formules, on a donc

$$-\wp\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{(e_2^2 - e_3^2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + (e_3^2 - e_1^2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_2} + (e_1^2 - e_2^2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}}{(e_2 - e_3)\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + (e_3 - e_1)\sqrt{\frac{D}{A} - e_2} + (e_1 - e_2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}},$$

$$\wp'\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{-2(e_2 - e_3)(e_3 - e_1(e_1 - e_2)}{(e_2 - e_3)\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + (e_3 - e_1)\sqrt{\frac{D}{A} - e_2} + (e_1 - e_2)\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{A}}\frac{\wp''\left(\frac{w}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{w}{2}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} + \sqrt{\frac{D}{A} - e_2} + \sqrt{\frac{D}{A} - e_3}\right\}.$$

---

[1] Voir SCHWARZ, *Formeln und Lehrsätze.*

Par conséquent la racine a de l'équation $R(x) = 0$, correspondante à la valeur particulière de w que nous avons choisie, est donnée par la formule:

$$a = -\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\sigma_1(w)+\sigma_2(w)+\sigma_3(w)}{\sigma(w)} - \frac{B}{A}$$

$$= -\frac{B}{A} - \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{\sqrt{\frac{D}{A}-e_1} + \sqrt{\frac{D}{A}-e_2} + \sqrt{\frac{D}{A}-e_3}\right\}.$$

Si l'on pose

$$h_0 = \frac{\sigma_1(w)+\sigma_2(w)+\sigma_3(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A}-e_1} + \sqrt{\frac{D}{A}-e_2} + \sqrt{\frac{D}{A}-e_3},$$

$$h_1 = \frac{(e_2-e_3)\sigma_1(w)+(e_3-e_1)\sigma_2(w)+(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$= (e_2-e_3)\sqrt{\frac{D}{A}-e_1} + (e_3-e_1)\sqrt{\frac{D}{A}-e_2} + (e_1-e_2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_3}.$$

$$h_2 = \frac{(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)+(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)+(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)}$$

$$= (e_2^2-e_3^2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_1} + (e_3^2-e_1^2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_2} + (e_1^2-e_2^2)\sqrt{\frac{D}{A}-e_3},$$

on a donc

$$a = -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}},$$

$$\varphi(u, w) = -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}}\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2)}{h_1\wp u + h_2}.$$

En posant

$$\tilde{\omega} = \omega_1,$$

$$\tilde{\omega} + \tilde{\omega}' = \omega_2,$$

$$\tilde{\omega}' = \omega_3$$

et en désignant par λ, μ, ν les nombres 1, 2, 3 dans un ordre quelconque, on a les formules

$$\frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\lambda)}{\sigma(u+2\omega_\lambda)} = \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u},$$

$$\frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\mu)}{\sigma(u+2\omega_\mu)} = -\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u},$$

$$\frac{\sigma_\lambda(u+2\omega_\nu)}{\sigma(u+2\omega_\nu)} = -\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}.$$

On obtient donc, en écrivant dans les formules précédentes, $w+2\omega_1$, $w+2\omega_2$, $w+2\omega_3$ à la place de w et en posant

$$h'_0 = \frac{\sigma_1(w)-\sigma_2(w)-\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h'_1 = \frac{(e_2-e_3)\sigma_1(w)-(e_3-e_1)\sigma_2(w)-(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h'_2 = \frac{(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)-(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)-(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h''_0 = \frac{-\sigma_1(w)+\sigma_2(w)-\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

(14) $$h''_1 = \frac{-(e_2-e_3)\sigma_1(w)+(e_3-e_1)\sigma_2(w)-(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h''_2 = \frac{-(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)+(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)-(e_1^2-e_2^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h'''_0 = \frac{-\sigma_1(w)-\sigma_2(w)+\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h'''_1 = \frac{-(e_2-e_3)\sigma_1(w)-(e_3-e_1)\sigma_2(w)+(e_1-e_2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

$$h'''_2 = \frac{-(e_2^2-e_3^2)\sigma_1(w)-(e_3^2-e_1^2)\sigma_2(w)+(e_1^2-e_3^2)\sigma_3(w)}{\sigma(w)},$$

les formules suivantes

(15)
$$
\begin{aligned}
a &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}},\\
\varphi(u, w) &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)}{h_1 \wp u + h_2},\\
a_1 &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0'}{\sqrt{A}},\\
\varphi(u + \omega_1, w) &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0'}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)}{h_1' \wp u + h_2'},\\
a_2 &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0''}{\sqrt{A}},\\
\varphi(u + \omega_2, w) &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0''}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)}{h_1'' \wp u + h_2''},\\
a_3 &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0'''}{\sqrt{A}},\\
\varphi(u + \omega_3, w) &= -\frac{B}{A} - \frac{h_0'''}{\sqrt{A}} - \frac{2}{\sqrt{A}} \frac{(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)}{h_1''' \wp u + h_2'''}.
\end{aligned}
$$

De cette manière on obtient les quatre fonctions *paires* de u, qui satisfont à l'équation différentielle $\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$, de même que les racines correspondantes de l'équation $R(x) = 0$, c'est à dire les valeurs que chacune de ces quatre fonctions prend pour $u = 0$, exprimées en fonctions rationelles des quantités suivantes:

$$
\frac{B}{A}, \quad \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad \frac{\sigma_1(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_1}, \quad \frac{\sigma_2(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_2}, \quad \frac{\sigma_3(w)}{\sigma(w)} = \sqrt{\frac{D}{A} - e_3}.
$$

Jusqu'à présent nous n'avons assujetti les constantes A, B, C, B', A' (les coefficients de $R(x)$) à aucune condition; supposons maintenant que tous ces coefficients sont réels. — Il y a toujours dans ce cas des valeurs réelles positives de u qui satisfont à l'équation $\wp'(u) = 0$; désignons par ω la plus petite de toutes ces valeurs. De même l'équation $\bar{\wp}'(u) = 0$ peut être satisfaite par des valeurs réelles positives de u et nous désignerons par $\tilde{\omega}$ la plus petite de ces dernières.

Il faut à présent distinguer deux cas:

I. La quantité $g_2^3 - 27g_3^2$ est *positive.*

Posons dans ce cas

$$\omega_1 = \omega, \qquad \omega_2 = \omega + \tilde{\omega}i, \qquad \omega_3 = \tilde{\omega}i,$$

$$\wp(\omega_1) = e_1, \qquad \wp(\omega_2) = e_2, \qquad \wp(\omega_3) = e_3.$$

Les quantités e_1, e_2, e_3, qui représentent les racines de l'équation

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0,$$

sont dans ce cas toutes trois réelles, et l'on a

$$e_1 > e_2 > e_3;$$

$(2\omega_1, 2\omega_3)$ est une paire de périodes primitives de la fonction $\wp(u)$.

II. La quantité $g_2^3 - 27g_3^2$ est *négative.*

Posons dans ce cas

$$\omega_1 = \frac{\omega - \tilde{\omega}i}{2}, \qquad \omega_2 = \omega, \qquad \omega_3 = \frac{\omega + \tilde{\omega}i}{2},$$

$$\wp(\omega_1) = e_1, \qquad \wp(\omega_2) = e_2, \qquad \wp(\omega_3) = e_3;$$

$(2\omega_1, 2\omega_3)$ représente dans ce cas aussi une paire de périodes primitives de la fonction $\wp(u)$, mais e_1 et e_3 sont dans ce cas des quantités imaginaires, conjuguées, tandis que $e_2 = -(e_1 + e_3)$ est réel. La quantité $\frac{e_1 - e_3}{i}$ est positive.

Si nous convenons de donner à $\sqrt{A}$ sa valeur positive dans le cas où A est positif, et de désigner par cette racine le produit de i par une quantité positive, dans le cas où A est négatif, on peut dans les deux cas déterminer de la manière suivante une valeur de w satisfaisant aux équations

$$\wp(w) = \frac{D}{A}, \qquad \wp'(w) = -\frac{E}{A\sqrt{A}}.$$

Les équations

$$\frac{E^2}{A^3} = \wp'(w)^2 = 4\left(\frac{D}{A} - e_1\right)\left(\frac{D}{A} - e_2\right)\left(\frac{D}{A} - e_3\right)$$

nous font voir que dans le cas I, si $A > 0$, $\frac{D}{A}$ doit être contenu soit dans l'intervalle $(e_1 \ldots \infty)$, soit dans l'intervalle $(e_3 \ldots e_2)$; si $A < 0$, $\frac{D}{A}$ appartiendra soit à l'intervalle $(-\infty \ldots e_3)$ soit à l'intervalle $(e_2 \ldots e_1)$. Dans le cas II, au contraire, $\frac{D}{A}$ doit être contenu soit dans l'intervalle $(e_2 \ldots \infty)$, soit dans l'intervalle $(-\infty \ldots e_2)$.

Désignons par $(a \ldots b)$ une quantité contenue dans l'intervalle réelle $(a \ldots b)$, par $(+)$ et $(-)$ des quantités positives ou négatives respectivement et par ε une quantité réelle satisfaisant à la condition

$$0 \leqq \varepsilon \leqq 1.$$

On a dans le cas I

$$(1) \qquad \wp(2\varepsilon\omega) = (\infty \ldots e_1), \qquad \wp'(2\varepsilon\omega) = \begin{cases} (-), & \text{si } \varepsilon < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{»} \ \varepsilon = \frac{1}{2}, \\ (+), & \text{»} \ \varepsilon > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(2) \qquad \wp(\omega + 2\varepsilon\tilde{\omega}i) = (e_1 \ldots e_2), \qquad \wp'(\omega + 2\varepsilon\tilde{\omega}i) = \begin{cases} (+)i, & \text{si } \varepsilon < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{»} \ \varepsilon = \frac{1}{2}, \\ (-)i, & \text{»} \ \varepsilon > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(3) \qquad \wp(2\varepsilon\omega + \tilde{\omega}i) = (e_3 \ldots e_2), \qquad \wp'(2\varepsilon\omega + \tilde{\omega}i) = \begin{cases} (+), & \text{si } \varepsilon < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{»} \ \varepsilon = 0, \\ (-), & \text{»} \ \varepsilon > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(4) \qquad \wp(2\varepsilon\tilde{\omega}i) = (-\infty \ldots e_3), \qquad \wp'(2\varepsilon\tilde{\omega}i) = \begin{cases} (-)i, & \text{si } \varepsilon < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{»} \ \varepsilon = \frac{1}{2}, \\ (+)i, & \text{»} \ \varepsilon > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dans chacun de ces quatre cas, si l'on fait croître ε d'une manière continue de o à $\frac{1}{2}$, la fonction $\wp(u)$ parcourt tout l'intervalle indiqué, en croissant continuellement dans le 3me et dans le 4me cas, en diminuant dans le 1er et dans le 2me. Si l'on fait varier ensuite ε de $\frac{1}{2}$ jusqu'à 1, $\wp(u)$ parcourt dans chaque cas le même intervalle qu'auparavant, mais dans le sens contraire. A deux valeurs de ε, à égale distance de $\frac{1}{2}$, correspondent les mêmes valeurs de $\wp(u)$, mais des valeurs contraires de $\wp'(u)$.

Dans le cas II on a

$$(5) \qquad \wp(2\varepsilon\omega) = (+\infty \dots e_2), \qquad \wp'(2\varepsilon\omega) = \begin{cases} (-), & \text{si } \varepsilon < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{» } \varepsilon = \frac{1}{2}, \\ (+), & \text{» } \varepsilon > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(6) \qquad \wp(2\varepsilon\tilde{\omega}i) = (-\infty \dots e_2), \qquad \wp'(2\varepsilon\tilde{\omega}i) = \begin{cases} (-)i, & \text{si } \varepsilon < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{» } \varepsilon = \frac{1}{2}, \\ (+)i, & \text{» } \varepsilon > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

D'après ces formules, on peut définir une quantité w, satisfaisant aux équations

$$\wp(w) = \frac{D}{A}, \qquad \wp'(w) = -\frac{E}{A\sqrt{A}}$$

de la manière suivante:

I. $g_2^3 - 27g_3^2$ *est positif.*

1) Si A est positif et $\frac{D}{A}$ appartient à l'intervalle $(+\infty \dots e_1)$ on peut poser

$$w = 2\varepsilon\omega \quad (0 < \varepsilon < 1),$$

en remarquant que

$$\varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2}, \quad \text{selon que} \quad E \gtreqless 0.$$

2) Si A est négatif et $\frac{D}{A}$ se trouve dans l'intervalle $(-\infty \ldots e_3)$, on peut poser

$$w = 2\varepsilon\tilde{\omega}i \quad (0 < \varepsilon < 1),$$

et l'on a

$$\varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2}, \text{ selon que } E \gtreqless 0.$$

3) Si A est positif, mais $\frac{D}{A}$ se trouve dans l'intervalle $(e_3 \ldots e_2)$ on peut poser

$$w = 2\varepsilon\omega + \tilde{\omega}i \quad (0 \leqq \varepsilon < 1),$$

et l'on a

$$\varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2}, \text{ selon que } E \lesseqgtr 0.$$

4) Si A est négatif et $\frac{D}{A}$ appartient à l'intervalle $(e_1 \ldots e_2)$ on peut poser

$$w = \omega + 2\varepsilon\tilde{\omega}i \quad (0 \leqq \varepsilon < 1),$$

et l'on a

$$\varepsilon \lesseqgtr \frac{1}{2}, \text{ selon que } E \lesseqgtr 0.$$

II. ***$g_2^3 - 27g_3^2$ est une quantité négative.***

5) Si A est positif, $\frac{D}{A}$ appartient à l'intervalle $(e_2 \ldots \infty)$ et l'on peut poser

$$w = 2\varepsilon\omega \quad (0 \leqq \varepsilon < 1),$$

$$\varepsilon \text{ étant } \lesseqgtr \frac{1}{2}, \text{ selon que } E \gtreqless 0.$$

6) Si A est négatif, $\frac{D}{A}$ se trouve dans l'intervalle $(-\infty \ldots e_2)$ et l'on peut poser

$$w = 2\varepsilon\tilde{\omega}i \quad (0 < \varepsilon < 1),$$

$$\varepsilon \text{ étant } \lesseqgtr \frac{1}{2}, \text{ selon que } E \gtreqless 0.$$

Les cas 1) et 2) se présentent lorsque toutes les quatre racines de l'équation $R(x) = 0$ sont réelles.

Les cas 3) et 4) ont lieu si tous ces racines sont imaginaires.

Enfin on a les cas 5) et 6) lorsque deux racines sont réelles et les deux autres imaginaires conjuguées.

Dans le cas 1) les quantités $\frac{D}{A} - e_1$, $\frac{D}{A} - e_2$, $\frac{D}{A} - e_3$ sont toutes trois réelles et positives; dans le cas 2) elles sont réelles et négatives; par conséquent, en vertu des équations (14) les quantités

$$\frac{h_0}{\sqrt{A}}, \frac{h_0'}{\sqrt{A}}, \frac{h_0''}{\sqrt{A}}, \frac{h_0'''}{\sqrt{A}}$$

sont dans les deux cas réelles.

Dans le cas 3) les quantités $\frac{D}{A} - e_1$, $\frac{D}{A} - e_2$ sont négatives, tandis que $\frac{D}{A} - e_3$ est positif; par conséquent

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_2}$$

sont des quantités imaginaires, tandis que $\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}$ est une quantité réelle.

Les quantités $\frac{h_0}{\sqrt{A}}$, $\frac{h_0'}{\sqrt{A}}$, $\frac{h_0''}{\sqrt{A}}$, $\frac{h_0'''}{\sqrt{A}}$ sont donc des quantités complexes. Les quantités a et a_3, ainsi que a_1 et a_2 sont dans ce cas-ci des quantités complexes conjuguées.

Dans le cas 4) les quantités $\frac{D}{A} - e_2$, $\frac{D}{A} - e_3$ sont positives, tandis que $\frac{D}{A} - e_1$ est négatif; par conséquent

$$\frac{\sqrt{\frac{D}{A} - e_1}}{\sqrt{A}} \quad \text{est réel, mais} \quad \frac{\sqrt{\frac{D}{A} - e_2}}{\sqrt{A}}, \frac{\sqrt{\frac{D}{A} - e_3}}{\sqrt{A}} \quad \text{sont imaginaires.}$$

$\frac{h_0}{\sqrt{A}}$, $\frac{h_0'}{\sqrt{A}}$, $\frac{h_0''}{\sqrt{A}}$, $\frac{h_0'''}{\sqrt{A}}$ sont des quantités complexes.

Les racines a et a_1, ainsi que a_2 et a_3 sont des quantités complexes conjuguées.

Dans le cas 5) $\frac{D}{A} - e_2$ est positif, $\frac{D}{A} - e_1$, $\frac{D}{A} - e_3$ sont des quantités complexes conjuguées. Les fonctions $\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}$; $\frac{\sigma_3 u}{\sigma u}$ prennent pour des valeurs réelles de u des valeurs complexes conjuguées, de manière que si u et u' sont des valeurs complexes conjuguées, les valeurs correspondantes

$$\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}, \frac{\sigma_3 u'}{\sigma u'}$$

sont aussi des quantités complexes conjuguées.

Dans le cas 5), aussi bien que dans le cas 6), les quantités

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\sigma_1 w}{\sigma w}, \frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\sigma_3 w}{\sigma w}$$

sont des quantités complexes conjugués, tandis que

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\sigma_2 w}{\sigma w}$$

est une quantité réelle.

Les quantités a et a_2 sont donc réelles dans les cas 5) et 6), mais a_1 et a_3 sont complexes et conjuguées.

Il résulte donc de la discussion précédente que, pour des valeurs réelles de u, les fonctions

$$\varphi(u, w), \varphi(u + \omega_1, w), \varphi(u + \omega_2, w), \varphi(u + \omega_3, w)$$

sont toutes réelles dans le cas 1) et 2) et toutes imaginaires, dans le cas 3) et 4). Il est à remarquer que dans le cas 3) la première et la troisième de même que la seconde et la quatrième de ces fonctions sont des quantités imaginaires conjuguées; dans le cas 4) ce sont au contraire la première et la seconde, de même que la 3[me] et la 4[me] de ces fonctions qui sont conjuguées.

Dans les cas 5) et 6) la première et la troisième de ces fonctions sont réelles, tandis que la seconde et la 4[me] sont imaginaires et conjuguées.

§ 4.

Pour pouvoir appliquer les formules du paragraphe précédent au cas qui nous occupe il faut commencer par la discussion des racines de l'équation

$$R(x) = -x^4 + 6l_1x^2 + 4c_0lx + c_0^2 - k^2 = 0.$$

Posons

$$k_0 = c_0^2 - k^2, \qquad l_0 = c_0 l.$$

En général, si

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

et que l'on pose

$$g_2 = AA' - 4BCB' + 3C^2,$$
$$g_3 = ACA' + 2BCB' - AB'^2 - A'B^2 - C^3,$$

la condition de la réalité des racines de l'équation $R(x) = 0$ peut s'énoncer de la manière suivante.

Si $G = g_2^3 - 27g_3^2 < 0$, l'équation $R(x) = 0$ a deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées.

Si $G = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$, toutes les quatre racines sont réelles à la fois ou toutes les quatre imaginaires, conjuguées deux à deux. Le premier cas a lieu, si l'on a en plus

$$B^2 - AC > 0, \; 12(B^2 - AC)^2 - A^2g_2 > 0.$$

Mais si, $g_2^3 - 27g_3^2$ étant positif, l'une de ces dernières quantités est négative, toutes les quatre racines de l'équation $R(x) = 0$ sont imaginaires.

Appliquons ceci à notre cas. On aura

$$A = -1, \quad B = 0, \quad C = l_1, \quad B' = lc_0 = l_0, \quad A' = c_0^2 - k^2 = k_0,$$

$$g_2 = -k_0 + 3l_1^2,$$
$$g_3 = -l_1(k_0 + l_1^2) + l_0^2,$$

$$B^2 - AC = l_1, \qquad 12(B^2 - AC)^2 - A^2 g_2 = k_0 + 9l_1^2,$$

$$g_2^3 - 27g_3^2 = (-k_0 + 3l_1^2)^3 - 27[-l_1(k_0 + l_1^2) + l_0^2]^2$$

$$= -27\left\{l_0^4 - 2l_1(k_0 + l_1^2)l_0^2 + \frac{1}{27}k_0(k_0 + 9l_1^2)^2\right\}.$$

En vertu de l'identité

$$l_1^2(k_0 + l_1^2)^2 = \frac{1}{27}k_0(k_0 + 9l_1^2)^2 + \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^3$$

les racines de l'équation quadratique en l_0^2

$$Q(l_0^2) = l_0^4 - 2l_1(k_0 + l_1^2)l_0^2 + \frac{1}{27}k_0(k_0 + 9l_1^2)^2$$

peuvent s'écrire

$$l_0'^2 = l_1(k_0 + l_1^2) + \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$l_0''^2 = l_1(k_0 + l_1^2) - \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

formules où nous supposerons le radical $\left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ positif, s'il est réel.

Appliquant ces formules à la discussion des racines de l'équation $R(x) = 0$, on voit qu'il faut distinguer les cas suivants:

1°. $l_1 > 0,\ k_0 > 0,\ -k_0 + 3l_1^2 < 0$.

Dans ce cas $l_0'^2$ et $l_0''^2$ sont tous les deux imaginaires. Par conséquent $G = -27Q(l_0^2)$ est négatif pour toutes les valeurs réelles de l_0, et l'équation $R(x) = 0$ a deux racines réelles et deux racines imaginaires.

2°. $l_1 > 0,\ k_0 > 0,\ -k_0 + 3l_1^2 > 0$.

$l_0'^2$ et $l_0''^2$ sont positifs tous les deux et $l_0'^2 > l_0''^2$. Alors si

$$l_0^2 > l_0'^2 \quad \text{ou} \quad l_0''^2 > l_0^2,$$

on a $G < 0$ et l'équation $R(x) = 0$ a encore deux racines réelles et deux racines imaginaires. Si au contraire

$$l_0'^2 > l_0^2 > l_0''^2,$$

G est positif, et, vu que l'on a aussi $l_1 > 0$, $k_0 + 9l_1^2 > 0$, les quatre racines de l'équation $R(x) = 0$ sont réelles.

3°. $l_1 > 0$, $k_0 < 0$, $k_0 + 9l_1^2 > 0$.

La racine $l_0'^2$ est positive, l'autre $l_0''^2$ négative. La quantité

$$G = -27Q(l_0^2)$$

est négative, si $l_0^2 > l_0'^2$, et dans ce cas l'équation $R(x) = 0$ a quatre racines réelles. Si au contraire $l_0^2 < l_0'^2$, G est positif, et l'équation proposée n'a que deux racines réelles.

4°. $l_1 > 0$, $k_0 < 0$, $k_0 + 9l_1^2 < 0$.

Comme dans le cas précédent G est positif pour $l_0^2 < l_0'^2$, et négatif pour $l_0^2 > l_0'^2$. S'il est négatif, l'équation $R(x) = 0$ a dans ce cas quatre racines imaginaires; s'il est positif elle a deux racines réelles et deux racines imaginaires.

5°. $l_1 < 0$, $k_0 > 0$.

$l_0'^2$ et $l_0''^2$ étant négatifs ou imaginaires, la quantité $G = -27Q(l_0^2)$ reste négative pour toute valeur réelle de l_0; l'équation $R(x) = 0$ a donc deux racines réelles et deux racines imaginaires.

6°. $l_1 < 0$, $k_0 < 0$.

Ce cas est tout à fait conforme au quatrième.

Résumé:

L'équation $R(x) = 0$ à quatre racines réelles dans les deux cas suivants:

1) $l_1 > 0$, $k_0 > 0$, $-k_0 + 3l_1^2 > 0$, $l_0'^2 > l_0^2 > l_0''^2$,

où

$$l_0'^2 = l_1(k_0 + l_1^2) + \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$l_0''^2 = l_1(k_0 + l_1^2) - \left(\frac{-k_0 + 3l_1^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

2) $l_1 > 0$, $k_0 < 0$, $k_0 + 9l_1^2 > 0$, $l_0^2 < l_0'^2$.

Les quatre racines de l'équation $R(x) = 0$ sont imaginaires dans les deux cas suivants:

1) $l_1 > 0$, $k_0 < 0$, $k_0 + 9l_1^2 < 0$, $l_0^2 < l_0'^2$.

2) $l_1 < 0$, $k_0 < 0$, $l_0^2 < l_0'^2$.

Enfin l'équation $R(x) = 0$ a deux racines réelles dans les cas suivants:

1) $l_1 > 0, k_0 > 0, -k_0 + 3l_1^2 < 0$, pour chaque valeur de l_0.

2) $l_1 > 0, k_0 > 0, -k_0 + 3l_1^2 > 0, l_0^2 > l_0'^2$ ou bien $l_0^2 < l_0''^2$.

3) $l_1 > 0, k_0 < 0, \quad k_0 + 9l_1^2 > 0, l_0^2 > l_0'^2$.

4) $l_1 > 0, k_0 < 0, \quad k_0 + 9l_1^2 < 0, l_0^2 > l_0'^2$.

5) $l_1 < 0, k_0 > 0$, pour chaque valeur de l_0.

6) $l_1 < 0, k_1 < 0, l_0^2 > l_0'^2$.

§ 5.

J'examinerai plus en détail le cas où toutes les racines de l'équation

$$R(x) = -x^4 + 6l_1x^2 + 4lc_0x + c_0^2 - k^2 = 0$$

sont réelles.

En nous servant des mêmes dénotations que dans le § 3, on a donc dans ce cas

$$\wp(w) = \frac{D}{A} = -l_1, \quad \wp'(w)^2 = 4s^3 - g_2s - g_3 = -l_0^2.$$

w est purement imaginaire.

e_1, e_2, e_3 sont réels et l'on a

$$e_1 > e_2 > e_3 > -l_1.$$

Les quantités

$$\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) = \sqrt{-(l_1 + e_1)}, \qquad \frac{\sigma_2}{\sigma}(w) = \sqrt{-(l_1 + e_2)}, \qquad \frac{\sigma_3}{\sigma}(w) = \sqrt{-(l_1 + e_3)}$$

sont toutes les trois purement imaginaires, et il en est de même des quantités

$$h_0 = \frac{\sigma_1}{\sigma}(w) + \frac{\sigma_2}{\sigma}(w) + \frac{\sigma_3}{\sigma}(w),$$

$$h_1 = (e_2 - e_3)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) + (e_3 - e_1)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w) + (e_1 - e_2)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w),$$

$$h_2 = (e_2^2 - e_3^2)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) + (e_3^2 - e_1^2)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w) + (e_1^2 - e_2^2)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w).$$

Le coefficient de x^4 dans $R(x)$ étant égal à -1, nous poserons donc dans ce cas, en désignant par E le produit $(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)$,

$$p + qi = x_1 = \varphi(u_1) = i\left(h_0 + \frac{2E}{h_1 \wp u_1 + h_2}\right),$$

$$p - qi = x_2 = \varphi(u_2) = i\left(h_0 + \frac{2E}{h_1 \wp u_2 + h_2}\right),$$

et l'on voit que x_1 et x_2 seront des quantités imaginaires conjuguées, si u_1 et u_2 le sont. Posons

$$u_1 = \frac{u + vi}{2}, \qquad u_2 = \frac{u - vi}{2},$$

u et v étant réels.

On a alors

$$s_1 = \wp(u_1 + u_2) = \wp(u),$$

$$s_2 = \wp(u_1 - u_2) = \wp(vi).$$

Il suit de ces formules, que s_1 et s_2 sont tous les deux des quantités réelles, contenues entre les limites suivantes

$$(\infty \ldots s_1 \ldots e_1), (e_3 \ldots s_2 \ldots -\infty).$$

Pour exprimer les quantités p et q au moyen de s_1 et s_2 je me servirai des formules suivantes.

On trouve à la page 50 de l'ouvrage cité de M. Schwarz les formules suivantes

$$\sigma_\lambda(w)\sigma(u + v + w)\sigma(u - v)$$
$$= \sigma(u + w)\sigma(u)\sigma_\lambda(v + w)\sigma_\lambda(v) - \sigma_\lambda(u + w)\sigma_\lambda(u)\sigma(v + w)\sigma(v),$$

$$\sigma_\lambda(w)\sigma_\lambda(u + v + w)\sigma_\lambda(u - v)$$
$$= \sigma_\lambda(u+w)\sigma_\lambda(u)\sigma_\lambda(v+w)\sigma_\lambda(v) - (e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)\sigma(u+w)\sigma(u)\sigma(v + w)\sigma(v).$$

En faisant dans ces formules $w = 0$ et en donnant successivement à λ les valeurs $1, 2, 3$ on trouve

$$\sigma(u + v)\,\sigma(u - v) = \sigma^2 u \sigma_1^2 v - \sigma_1^2 u \sigma^2 v$$
$$\sigma_1(u + v)\sigma_1(u - v) = \sigma_1^2 u \sigma_1^2 v - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\sigma^2 u \sigma^2 v,$$
$$\sigma_2(u + v)\sigma_2(u - v) = \sigma_2^2 u \sigma_2^2 v + (e_1 - e_2)(e_2 - e_3)\sigma^2 u \sigma^2 v,$$
$$\sigma_3(u + v)\sigma_3(u - v) = \sigma_3^2 u \sigma_3^2 v - (e_1 - e_3)(e_2 - e_3)\sigma^2 u \sigma^2 v,$$

ou bien, en remarquant que

$$\sigma_2^2 u = \sigma_1^2 u + (e_1 - e_2)\sigma^2 u,$$

$$\sigma_3^2 u = \sigma_1^2 u + (e_1 - e_3)\sigma^2 u,$$

$$\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) = \sigma_1^2 u \sigma_1^2 v + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\sigma^2 u \sigma^2 v + (e_1 - e_2)(\sigma^2 u \sigma_1^2 v + \sigma_1^2 u \sigma^2 v),$$

$$\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v) = \sigma_1^2 u \sigma_1^2 v + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\sigma^2 u \sigma^2 v + (e_1 - e_3)(\sigma^2 u \sigma_1^2 v + \sigma_1^2 u \sigma^2 v).$$

Il suit de ces formules

$$2(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2)\sigma^2 u \sigma^2 v = (e_2 - e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v)$$
$$+ (e_3 - e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) + (e_1 - e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v),$$

$$2(e_2 - e_3)\sigma_1^2 u \sigma_1^2 v = (e_2 - e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v)$$
$$- (e_3 - e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) - (e_1 - e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v),$$

$$2(e_2 - e_3)\sigma^2 u \sigma_1^2 v$$
$$= (e_2 - e_3)\sigma(u+v)\sigma(u-v) - \sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) + \sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v),$$

$$2(e_2 - e_3)\sigma_1^2 u \sigma^2 v$$
$$= -(e_2 - e_3)\sigma(u+v)\sigma(u-v) - \sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) + \sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v),$$

d'où l'on tire par division

$$\frac{\sigma_1^2 u}{\sigma^2 u} = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\frac{(e_2 - e_3)\sigma(u+v)\sigma(u-v) + \sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) - \sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}{(e_2 - e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v) + (e_3 - e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) + (e_1 - e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}$$

et par conséquent, vu que $\wp u = \frac{\sigma_1^2 u}{\sigma^2 u} + e_1$,

$$\wp u = -\frac{E\sigma(u+v)\sigma(u-v) + (e_2^2 - e_3^2)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v) + (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) + (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}{(e_2 - e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v) + (e_3 - e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) + (e_1 - e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)},$$

$$\wp v = -\frac{-E\sigma(u+v)\sigma(u-v) + (e_2^2 - e_3^2)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v) + (e_3^2 - e_1^2)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) + (e_1^2 - e_2^2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}{(e_2 - e_3)\sigma_1(u+v)\sigma_1(u-v) + (e_3 - e_1)\sigma_2(u+v)\sigma_2(u-v) + (e_1 - e_2)\sigma_3(u+v)\sigma_3(u-v)}.$$

En posant donc

$$P_\alpha = \frac{\sigma_\alpha(u_1 + u_2)}{\sigma(u_1 + u_2)}\frac{\sigma_\alpha(u_1 - u_2)}{\sigma(u_1 - u_2)} = \sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)}, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

on a

$$\wp(u_1) + \wp(u_2) = -2\frac{(e_2^2 - e_3^2)P_1 + (e_3^2 - e_1^2)P_2 + (e_1^2 - e_2^2)P_3}{(e_2 - e_3)P_1 + (e_3 - e_1)P_2 + (e_1 - e_2)P_3},$$

$$\wp(u_1) - \wp(u_2) = \frac{-2E}{(e_2 - e_3)P_1 + (e_3 - e_1)P_2 + (e_1 - e_2)P_3},$$

$$\wp(u_1)\cdot\wp(u_2) = -\frac{(e_2 - e_3)(e_1^2 + e_2e_3)P_1 + (e_3 - e_1)(e_2^2 + e_3e_1)P_2 + (e_1 - e_2)(e_3^2 + e_1e_2)P_3}{(e_2 - e_3)P_1 + (e_3 - e_1)P_2 + (e_1 - e_2)P_3}.$$

En portant ces expressions dans les formules

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = i\left(h_0 + E\frac{h_1(\wp u_1 + \wp u_2) + 2h_2}{h_1^2\wp u_1\wp u_2 + h_1h_2(\wp u_1 + \wp u_2) + h_2^2}\right),$$

$$q = \frac{x_1 - x_2}{2i} = E\frac{h_1(\wp u_1 - \wp u_2)}{h_1^2\wp u_1\wp u_2 + h_1h_2(\wp u_1 + \wp u_2) + h_2^2},$$

on trouve, après quelques calculs,

$$p = -i\frac{L_1P_1 + M_1P_2 + N_1P_3}{LP_1 + MP_2 + NP_3},$$

$$q = \frac{E}{LP_1 + MP_2 + NP_3},$$

où j'ai posé

$$L = (e_2 - e_3)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) = i(e_2 - e_3)\sqrt{l_1 + e_1},$$

$$M = (e_3 - e_1)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w) = i(e_3 - e_1)\sqrt{l_1 + e_2},$$

$$N = (e_1 - e_2)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w) = i(e_1 - e_2)\sqrt{l_1 + e_3},$$

$$L_1 = (e_2 - e_3)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w) = (e_2 - e_3)\sqrt{(l_1 + e_2)(l_1 + e_3)},$$

$$M_1 = (e_3 - e_1)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) = (e_3 - e_1)\sqrt{(l_1 + e_3)(l_1 + e_1)},$$

$$N_1 = (e_1 - e_2)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w) = (e_1 - e_2)\sqrt{(l_1 + e_1)(l_1 + e_2)}.$$

Les quantités $l_1 + e_1$, $l_1 + e_2$, $l_1 + e_3$ sont toutes les trois positives.

Les quantités $s_1 - e_1$, $s_1 - e_2$, $s_1 - e_3$ sont aussi positives.

Les quantités $s_2 - e_1$, $s_2 - e_2$, $s_2 - e_3$ sont au contraire toutes les trois négatives.

L, M, N, P_1, P_2, P_3 sont donc imaginaires.

L_1, M_1, N_1 sont réels.

On voit que p et q ont des valeurs réelles.

Pour calculer la valeur de r je me sers de l'équation

$$2\frac{dp}{dt} = qr.$$

En général, si l'on pose

$$R(s) = R_0(s-a_0)(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)(s-a_4),$$

$$du_1 = \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}, \qquad ds_1 = \frac{\sqrt{R(s_1)}}{s_1 - s_2}(du_1 - s_2 du_2),$$

$$du_2 = \frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}, \qquad ds_2 = \frac{\sqrt{R(s_2)}}{s_2 - s_1}(du_1 - s_1 du_2),$$

$$P_\alpha = \sqrt{c_\alpha(s_1 - a_\alpha)(s_2 - a_\alpha)}$$

$$P_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta}{s_1 - s_2}\left\{\frac{\sqrt{R(s_1)}}{(s_1 - a_\alpha)(s_1 - a_\beta)} - \frac{\sqrt{R(s_2)}}{(s_2 - a_\alpha)(s_2 - a_\beta)}\right\}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 0, \ldots, 4\\ \beta = 0, \ldots, 4\end{pmatrix}$$

c_α et $c_{\alpha\beta}$ désignant des constantes quelconques, on trouve après quelques calculs,

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial u_1} = \frac{1}{2(a_\beta - a_\gamma)}\left\{\frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma}}{c_\gamma c_{\alpha\gamma}} - \frac{P_\beta P_{\alpha\beta}}{c_\beta c_{\alpha\beta}}\right\},$$

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial u_2} = \frac{1}{2(a_\beta - a_\gamma)}\left\{\frac{a_\gamma P_\beta P_{\alpha\beta}}{c_\beta c_{\alpha\beta}} - \frac{a_\beta P_\gamma P_{\alpha\gamma}}{c_\gamma c_{\alpha\gamma}}\right\},$$

$$\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial u_1} = \frac{1}{2} R_0 c_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta,$$

$$\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial u_2} = -\frac{1}{2} R_0 a_\gamma c_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta - \frac{1}{2}\frac{c_{\alpha\beta} P_{\alpha\gamma} P_{\beta\gamma}}{c_\gamma c_{\alpha\gamma} c_{\beta\gamma}}.$$

Dans notre cas on a

$$R(s) = -4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)(s - k_1)(s - k_2), \qquad R_0 = -4,$$

$$dt = du_1, \qquad 0 = du_2.$$

On trouve donc

$$r = \frac{2}{q}\frac{dp}{dt} = -i\frac{LP_{23} + MP_{31} + NP_{12}}{LP_1 + MP_2 + NP_3},$$

$$P_{23} = \frac{i}{s_1 - s_2}\{\sqrt{s_1 - e_1)(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)(s_2 - e_2)(s_2 - e_3)}$$
$$- \sqrt{(s_1 - e_2)(s_1 - e_3)(s_2 - e_1)(s_2 - k_1)(s_2 - k_2}\},$$

$$P_{13} = \frac{i}{s_1 - s_2}\{\sqrt{(s_1 - e_2)(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)(s_2 - e_1)(s_2 - e_3)}$$
$$- \sqrt{(s_1 - e_3)(s_1 - e_1)(s_2 - e_2)(s_2 - k_1)(s_2 - k_2)}\},$$

$$P_{12} = \frac{i}{s_1 - s_2}\{\sqrt{(s_1 - e_3)(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)(s_2 - e_1)(s_2 - e_2)}$$
$$- \sqrt{(s_1 - e_1)(s_1 - e_2)(s_2 - e_3)(s_2 - k_1)(s_2 - k_2)}\}.$$

Comme nous l'avons vu plus haut, pour des valeurs réelles de t, s_1 et s_2 doivent être contenus entre les limites suivantes

$$\infty \ldots s_1 \ldots e_1, e_2 \ldots s_2 \ldots -\infty.$$

Les quantités

$$(s_1 - e_1)(s_2 - e_2)(s_2 - e_3)$$
$$(s_1 - e_2)(s_2 - e_3)(s_2 - e_1)$$
$$(s_1 - e_3)(s_2 - e_1)(s_2 - e_2)$$

sont donc positives, et les quantités

$$(s_1 - e_2)(s_1 - e_3)(s_2 - e_1)$$
$$(s_1 - e_3)(s_1 - e_1)(s_2 - e_2)$$
$$(s_1 - e_1)(s_1 - e_2)(s_2 - e_3)$$

négatives.

Pour que r soit réel pour des valeurs réelles de t, il faut que P_{23}, P_{13}, P_{12} soient réelles; pour que cela ait lieu, il faut que le produit

$$(s_1 - k_1)(s_1 - k_2)$$

soit négatif, et que le produit

$$(s_2 - k_1)(s_2 - k_2)$$

soit positif.

Les constantes d'intégration doivent donc être choisies de manière à satisfaire à l'inégalité

$$k_1 > e_1 > k_2.$$

s_1 et s_2 devront alors être contenus entre les limites

$$(k_1 \ldots s_1 \ldots e_1), (k_2 \ldots s_2 \ldots -\infty).$$

Il nous reste à calculer les valeurs de $\gamma, \gamma', \gamma''$.

On obtient γ'' de l'équation

$$2\frac{dq}{dt} = -rp - c_0\gamma''$$

ou

$$c_0\gamma'' = -\left(2\frac{dq}{dt} + rp\right),$$

et l'on trouve à l'aide des formules de différentiation précitées

$$c_0\gamma'' = \frac{L_1P_{23} + M_1P_{13} + N_1P_{12}}{LP_{23} + MP_{13} + NP_{12}},$$

les coefficients L, M, N, L_1, M_1, N_1 ayant les mêmes significations qu'auparavant.

La valeur de γ' peut être calculée à l'aide de l'équation

$$\frac{dr}{dt} = c_0\gamma'.$$

L'on trouve

$$c_0\gamma' = -i.\frac{(LP_1 + MP_2 + NP_3)\left(L\frac{d}{dt}P_{23} + M\frac{d}{dt}P_{13} + N\frac{d}{dt}P_{12}\right) - (LP_{23} + MP_{13} + NP_{12})\left(L\frac{d}{dt}P_1 + M\frac{d}{dt}P_2 + N\frac{d}{dt}P_3\right)}{(LP_1 + MP_2 + NP_3)^2}.$$

D'après les formules de différentiation précitées, l'on trouve

$$(LP_1 + MP_2 + NP_3)\left(L\frac{d}{dt}P_{23} + M\frac{d}{dt}P_{13} + N\frac{d}{dt}P_{12}\right)$$

$$-(LP_{23} + MP_{13} + NP_{12})\left(L\frac{d}{dt}P_1 + M\frac{d}{dt}P_2 + N\frac{d}{dt}P_3\right)$$

$$= R_0(LP_1 + MP_2 + NP_3)(LP_2P_3 + MP_3P_1 + NP_1P_2)$$

$$-(LP_{23}+MP_{31}+NP_{12})\left(L\frac{P_3P_{13}-P_2P_{12}}{e_2-e_3}+M\frac{P_1P_{12}-P_3P_{23}}{e_3-e_1}+N\frac{P_2P_{23}-P_1P_{13}}{e_1-e_2}\right)$$

$$= R_0(L^2 + M^2 + N^2)P_1P_2P_3 - \frac{L^2}{e_2 - e_3}P_{23}(P_3P_{13} - P_2P_{12})$$

$$-\frac{M^2}{e_3 - e_1}P_{13}(P_1P_{12} - P_3P_{23}) - \frac{N^2}{e_1 - e_2}P_{12}(P_2P_{23} - P_1P_{13})$$

$$+ MN\left(R_0(P_2^2 + P_3^2)P_1 - P_{13}\frac{P_2P_{23} - P_1P_{13}}{e_1 - e_2} - P_{12}\frac{P_1P_{12} - P_3P_{23}}{e_3 - e_1}\right)$$

$$+ NL\left(R_0(P_3^2 + P_1^2)P_2 - P_{12}\frac{P_3P_{13} - P_2P_{12}}{e_2 - e_3} - P_{23}\frac{P_2P_{23} - P_1P_{13}}{e_1 - e_2}\right)$$

$$+ LM\left(R_0(P_1^2 + P_2^2)P_3 - P_{23}\frac{P_1P_{12} - P_3P_{23}}{e_3 - e_1} - P_{13}\frac{P_3P_{13} - P_2P_{12}}{e_2 - e_3}\right).$$

Cette expression du nominateur de γ' peut être un peu simplifiée de la manière suivante.

En désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ les nombres 1, 2, 3, 4, 5 rangées dans un ordre quelconque et en posant, comme nous l'avons fait,

$$P_\alpha = \sqrt{(s_1 - a_\alpha)(s_2 - a_\alpha)},$$

$$P_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{R_0(s_1 - a_\gamma)(s_1 - a_\delta)(s_1 - a_\varepsilon)(s_2 - a_\alpha)(s_2 - a_\beta)} - \sqrt{R_0(s_1 - a_\alpha)(s_1 - a_\beta)(s_2 - a_\gamma)(s_2 - a_\delta)(s_2 - a_\varepsilon)}}{s_1 - s_2},$$

on trouve facilement les relations suivantes:

$$R_0 P_\alpha P_\beta P_\gamma - P_{\beta\gamma}\frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma} - P_\beta P_{\alpha\beta}}{a_\beta - a_\gamma} = P_{\alpha\delta} P_{\alpha\varepsilon},$$

$$R_0 P_\alpha P_\beta P_\gamma - P_{\alpha\gamma}\frac{P_\alpha P_{\alpha\beta} - P_\gamma P_{\beta\gamma}}{a_\gamma - a_\alpha} = P_{\beta\delta} P_{\beta\varepsilon},$$

$$R_0 P_\alpha P_\beta P_\gamma - P_{\alpha\beta}\frac{P_\beta P_{\beta\gamma} - P_\alpha P_{\alpha\gamma}}{a_\alpha - a_\beta} = P_{\gamma\delta} P_{\gamma\varepsilon},$$

$$R_0(P_\beta^2 + P_\gamma^2)P_\alpha - P_{\alpha\gamma}\frac{P_\beta P_{\beta\gamma} - P_\alpha P_{\alpha\gamma}}{a_\alpha - a_\beta} - P_{\alpha\beta}\frac{P_\alpha P_{\alpha\beta} - P_\gamma P_{\beta\gamma}}{a_\gamma - a_\alpha}$$

$$= P_{\beta\delta} P_{\gamma\varepsilon} + P_{\beta\varepsilon} P_{\gamma\delta} + R_0 (a_\beta - a_\gamma)^2 P_\alpha,$$

$$R_0(P_\gamma^2 + P_\alpha^2)P_\beta - P_{\alpha\beta}\frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma} - P_\beta P_{\alpha\beta}}{a_\beta - a_\gamma} - P_{\beta\gamma}\frac{P_\beta P_{\beta\gamma} - P_\alpha P_{\alpha\gamma}}{a_\alpha - a_\beta}$$

$$= P_{\gamma\delta} P_{\alpha\varepsilon} + P_{\alpha\delta} P_{\gamma\varepsilon} + R_0 (a_\gamma - a_\alpha)^2 P_\beta,$$

$$R_0(P_\alpha^2 + P_\beta^2)P_\gamma - P_{\beta\gamma}\frac{P_\alpha P_{\alpha\beta} - P_\gamma P_{\beta\gamma}}{a_\gamma - a_\alpha} - P_{\alpha\gamma}\frac{P_\gamma P_{\alpha\gamma} - P_\beta P_{\alpha\beta}}{a_\beta - a_\gamma}$$

$$= P_{\alpha\delta} P_{\beta\varepsilon} + P_{\alpha\varepsilon} P_{\beta\delta} + R_0 (a_\alpha - a_\beta)^2 P_\gamma.$$

Si l'on pose donc

$$a_1 = e_1, \qquad k_1 = a_4,$$
$$a_2 = e_2, \qquad k_2 = a_5,$$
$$a_3 = e_3,$$

on trouve pour $c_0\gamma'$ l'expression suivante

$$c_0\gamma' = \frac{i}{2}\,\frac{L^2P_{14}P_{15} + M^2P_{24}P_{25} + N^2P_{34}P_{35} + MN[P_{24}P_{35} + P_{25}P_{34} + (e_2-e_3)^2P_1] + NL[P_{34}P_{15} + P_{35}P_{14} + (e_3-e_1)^2P_2] + LM[P_{14}P_{25} + P_{15}P_{24} + (e_1-e_2)^2P_3}{(LP_1 + MP_2 + NP_3)^2}$$

Enfin on trouve la valeur de γ, exprimée à l'aide de s_1 et de s_2, à l'aide de l'équation

$$2(p^2 + q^2) + r^2 = 2c_0\gamma + 6l_1.$$

En posant

$$L_2 = (e_2^2 - e_3^2)\frac{\sigma_1}{\sigma}(w) = i(e_2^2 - e_3^2)\sqrt{l_1 + e_1},$$

$$M_2 = (e_3^2 - e_1^2)\frac{\sigma_2}{\sigma}(w) = i(e_3^2 - e_1^2)\sqrt{l_1 + e_2},$$

$$N_2 = (e_1^2 - e_2^2)\frac{\sigma_3}{\sigma}(w) = i(e_1^2 - e_2^2)\sqrt{l_1 + e_3},$$

on trouve

$$2c_0\gamma = -4l_1 + \frac{L_2P_1 + M_2P_2 + N_2P_3}{LP_1 + MP_2 + NP_3} - \left(\frac{LP_{23} + MP_{13} + NP_{12}}{LP_1 + MP_2 + NP_3}\right)^2.$$

§ 6.

Les six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ une fois exprimées en fonctions de s_1 et de s_2, on obtient sans peine l'expression de chaque fonction rationnelle symétrique de ces deux dernières quantités, en fonction du temps, à l'aide de formules générales.

J'emprunte les définitions suivantes, introduites dans l'analyse par M. Weierstrass, au mémoire de M. Königsberger *Zur Transformation der Abelschen Functionen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 64).

Soit

$$R(x) = A_0(x - a_0)(x - a_1)\ldots(x - a_{2\rho})$$

une fonction entière de x du degré $2\rho + 1$; supposons que $A_0, a_0, a_1, \ldots, a_{2\rho}$ soient toutes des quantités réelles et, si $A_0 > 0$,

$$a_0 > a_1 > \ldots > a_{2\rho},$$

mais si $A_0 < 0$

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_{2\rho}.$$

Soient $u_1, \ldots, u_\rho$ ρ variables, liées aux ρ variables $x_1, \ldots, x_\rho$ par les

ρ équations suivantes, dans lesquelles $F_1(x), \ldots, F_\rho(x)$ désignent des fonctions entières de x d'un degré inférieur à ρ,

$$u_1 = \int_{a_1}^{x_1} \frac{F_1(x)dx}{\sqrt{R(x)}} + \ldots + \int_{a_{2\rho-1}}^{x_\rho} \frac{F_1(x)dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$u_\rho = \int_{a_1}^{x_1} \frac{F_\rho(x)dx}{\sqrt{R(x)}} + \ldots + \int_{a_{2\rho-1}}^{x_\rho} \frac{F_\rho(x)dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

Posons

$$K_{\alpha\beta} = \int_{a_{2\beta-1}}^{a_{2\beta}} \frac{F_\alpha(x)dx}{\sqrt{R(x)}}, \qquad i\overline{K}_{\alpha\beta} = \int_{a_{2\beta-2}}^{a_{2\beta-1}} \frac{F_\alpha(x)dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$iK'_{\mu\nu} = i\overline{K}_{\mu 1} + i\overline{K}_{\mu 2} + \ldots + i\overline{K}_{\mu\nu},$$

en convenant de définir la racine carrée dans chacune de ces intégrales par la formule

$$\sqrt{R(x)} = A_0^{\rho+1}\left(\frac{x-a_0}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-a_1}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}\cdots\left(\frac{x-a_{2\rho}}{A_0}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définissons ρ variables nouvelles $v_1, \ldots, v_\rho$ par les équations

$$u_1 = 2K_{11}v_1 + \ldots + 2K_{1\rho}v_\rho,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$u_\rho = 2K_{\rho 1}v_1 + \ldots + 2K_{\rho\rho}v_\rho.$$

Supposons que ces équations, résolues par rapport à $v_1, \ldots, v_\rho$, nous donnent

$$v_1 = G_{11}u_1 + \ldots + G_{\rho 1}u_\rho,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$v_\rho = G_{1\rho}u_1 + \ldots + G_{\rho\rho}u_\rho.$$

Posons

$$\tau_{\alpha\beta} = 2i(G_{1\alpha}K_{1\beta} + \ldots + G_{\rho\alpha}K_{\rho\beta}),$$

d'où il suit $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$, et définissons la fonction $\vartheta(v_1 \ldots v_\rho)$ comme la somme de la série infinie

$$\vartheta(v_1 \ldots v_\rho) = \sum e^{\left\{\nu_1(2v_1+\nu_1\tau_{11}+\ldots+\nu_\rho\tau_{1\rho})+\ldots+\nu_\rho(2v_\rho+\nu_1\tau_{\rho 1}+\ldots+\nu_\rho\tau_{\rho\rho})\right\}\pi i};$$

la sommation, indiquée par le signe Σ, doit être effectuée de telle manière, que chacune des ρ quantités $\nu_1, \ldots, \nu_\rho$ parcourt, indépendemment des autres, toute la série des nombres entiers de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Cette fonction $\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)$ satisfait aux deux équations suivantes:

$$\vartheta(v_1 + p_1 \ldots v_\rho + p_\rho) = \vartheta(v_1 \ldots v_\rho),$$

$p_1 \ldots p_\rho$ désignant des nombres entiers quelconques, et

$$\vartheta(v_1 + \tau_{1\alpha} \ldots v_\rho + \tau_{\rho\alpha}) = \vartheta(v_1 \ldots v_\rho)e^{-(2v_\alpha+\tau_{\alpha\alpha})\pi i}.$$

Inversement, chaque fonction continue de $v_1 \ldots v_\rho$ satisfaisant à ces deux équations pour toutes les systèmes de valeurs $v_1 \ldots v_\rho$, doit nécessairement être égale à $\vartheta(v_1 \ldots v_\rho)$, multipliée par une constante.

Désignons par $n_1 \ldots n_\rho$ des constantes arbitraires, posons

$$\tau_\alpha = n_1\tau_{\alpha 1} + n_2\tau_{\alpha 2} + \ldots + n_\rho\tau_{\alpha\rho}$$

et définissons une nouvelle fonction $\vartheta(v_1 \ldots v_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho)$ par l'équation

$$\vartheta(v_1 \ldots v_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho) = \vartheta(v_1 + \tau_1 \ldots v_\rho + \tau_\rho)e^{\sum_\alpha n_\alpha(2v_\alpha+\tau_\alpha)\pi i}.$$

Les quantités $n_1 \ldots n_\rho$ s'appellent les *paramètres* de cette nouvelle fonction ϑ. Si $n'_1 \ldots n'_\rho$ désignent un autre système de ρ constantes, et que l'on pose

$$\tau'_\alpha = n'_1\tau'_{\alpha 1} + \ldots + n'_\rho\tau'_{\alpha\rho},$$

on a

$$\vartheta(v_1 + \tau'_1 \ldots v_\rho + \tau'_\rho \mid n_1 \ldots n_\rho)$$

$$= \vartheta(v_1 \ldots v_\rho \mid n_1 + n'_1 \ldots n_\rho + n'_\rho)e^{-\sum n'_\alpha(2v_\alpha+\tau'_\alpha)\pi i}.$$

Si les quantités $n'_1 \dots n'_\rho$, $m_1 \dots m_\rho$ sont des nombres entiers, on a

$$\vartheta(v_1 \dots v_\rho \,|\, n_1 + n'_1 \dots n_\rho + n'_\rho) = \vartheta(v_1 \dots v_\rho \,|\, n_1 \dots n_\rho),$$

$$\vartheta(v_1 + m_1 \dots v_\rho + m_\rho \,|\, n_1 \dots n_\rho) = e^{\sum_a 2 m_a n_a \pi i} \vartheta(v_1 \dots v_\rho \,|\, n_1 \dots n_\rho),$$

$$\vartheta(v_1 + \tau'_1 \dots v_\rho + \tau'_\rho \,|\, n_1 \dots n_\rho) = e^{-\sum n'_a (2 v_a + \tau'_a) \pi i} \vartheta(v_1 \dots v_\rho \,|\, n_1 \dots n_\rho).$$

Posons de plus

$$\vartheta(v_1 \dots v_\rho)_\lambda = \vartheta\left(v_1 + \frac{1}{2} m_1^\lambda \dots v_\rho + \frac{1}{2} m_\rho^\lambda \,\middle|\, \frac{1}{2} n_1^\lambda \dots \frac{1}{2} n_\rho^\lambda\right) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, 2\rho)$$

où les nombres entiers $m_1^\lambda \dots m_\rho^\lambda$, $n_1^\lambda \dots n_\rho^\lambda$ sont définis par l'équation

$$\int_\infty^{a_\lambda} \frac{F_a(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = m_1^\lambda K_{a1} + \dots + m_\rho^\lambda K_{a\rho} + i(n_1^\lambda K'_{a1} + n_2^\lambda K'_{a2} + \dots + n_\rho^\lambda K'_{a\rho}).$$

(On s'assure facilement que chacun des nombres entiers $m_1^\lambda \dots m_\rho^\lambda$ est égal à o ou à — 1; et chacun des nombres entiers $n_1^\lambda \dots n_\rho^\lambda$ à o ou a + 1).

En désignant ensuite par λ et μ deux nombres différents quelconques de la série o, 1, ..., 2ρ, définissons les nombres entiers $m_1^\nu \dots m_\rho^\nu$, $n_1^\nu \dots n_\rho^\nu$ par les congruences

$$\left.\begin{aligned} m_a^\nu &\equiv m_a^\lambda + m_a^\mu \\ n_a^\nu &\equiv n_a^\lambda + n_a^\mu \end{aligned}\right\} \pmod 2$$

et de plus par la condition que chacun des nombres m_λ^ν doit être égal à o ou à — 1, et chacun des nombres n_λ^ν à o ou à + 1, et posons

$$\vartheta(v_1 \dots v_\rho)_{\lambda\mu} = \vartheta\left(v_1 + \frac{1}{2} m_1^\nu \dots v_\rho + \frac{1}{2} m_\rho^\nu \,\middle|\, \frac{1}{2} n_1^\nu \dots \frac{1}{2} n_\rho^\nu\right).$$

La relation entre les variables $v_1 \dots v_\rho$ et $x_1 \dots x_\rho$ peut alors être exprimée de la manière suivante.

Posons

$$\varphi(x) = (x - x_1) \dots (x - x_\rho)$$

et désignons par $\varepsilon \pm 1$, selon que $A_0 \gtrless 0$; on a alors

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^\rho(-1)^\alpha\varphi(a_{2\alpha})}}{\sqrt[4]{R'(a_{2\alpha})}} = \frac{\vartheta(v_1\ldots v_\rho)_{2\alpha}}{\vartheta(v_1\ldots v_\rho)},$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^\rho(-1)^{\alpha-1}\varphi(a_{2\alpha-1})}}{\sqrt[4]{R'(a_{2\alpha-1})}} = \frac{\vartheta(v_1\ldots v_\rho)_{2\alpha-1}}{\vartheta(v_1\ldots v_\rho)},$$

$$A_0\sqrt{\frac{\pm(a_\lambda-a_\mu)}{A_0}}\sum_1^\rho{}_\alpha\left\{\frac{\sqrt{R(x_\alpha)}}{(x_\alpha-a_\lambda)(x_\alpha-a_\mu)\varphi'(x_\alpha)}\right\} = \frac{\vartheta(v_1\ldots v_\rho)\vartheta(v_1\ldots v_\rho)_{\lambda\mu}}{\vartheta(v_1\ldots v_\rho)_\lambda\vartheta(v_1\ldots v_\rho)_\mu}.$$

Nous avons supposé que toutes les racines de l'équation $R(x)=0$ sont réelles. M. HENOCH a montré dans sa dissertation inaugurale (Berlin 1867) comment ces formules peuvent être généralisées, pour le cas où les racines de l'équation $R(x)=0$ sont imaginaires.

§ 7.

Pour pouvoir appliquer les formules du paragraphe précédent au cas qui nous occupe, il faut ranger les cinq quantités réelles k_1, k_2, e_1, e_2, e_3 par ordre de grandeur.

Plusieurs cas peuvent se présenter ici. Le manque de temps m'empêche de les examiner tous en détail. Je me contenterai d'effectuer tous les calculs pour le cas où l'on a entre les constantes d'intégration les inégalités suivantes

$$l_1 > k > c_0 > 0,\ l^2 < \frac{3l_1-k}{2}.$$

Dans ce cas, si l'on écrit

$$4s^3-g_2s-g_3 = 4(s+l_1)\left(s-\frac{l_1+\sqrt{k^2-c_0^2}}{2}\right)\left(s-\frac{l_1-\sqrt{k^2-c_0^2}}{2}\right)-l_0^2,$$

on s'assure facilement que les cinq quantités e_1, e_2, e_3, k_1, k_2 satisfont aux inégalités suivantes

$$\frac{l_1+k}{2} > e_1 > e_2 > \frac{l_1-k}{2} > e_3.$$

Si l'on désigne par a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 les cinq racines de l'équation $R(s)=0$, rangées par ordre de grandeur

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4,$$

il faut donc poser

$$\frac{l_1 + k}{2} = a_4, \qquad \frac{l_1 - k}{2} = a_1, \qquad e_1 = a_3, \qquad e_2 = a_2, \qquad e_3 = a_0.$$

Si l'on pose alors

$$dt = du_1 = \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R(s_2)}},$$

$$0 = du_2 = \frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}}$$

et que l'on détermine les quantités $K_{\alpha\beta}$, $K'_{\alpha\beta}$, $v_1 \ldots v_\rho$ comme il a été montré au paragraphe précédent; v_1, v_2 seront des fonctions linéaires du temps, et l'on aura, en désignant par c_λ la valeur que prend $\vartheta(v_1, v_2)_\lambda$ pour $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, les relations suivantes:

$$\frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_1} = \frac{e_1 - e_2}{k} = \frac{c_2^2 c_{03}^2 c_{34}^2}{c_4^2 c_{01}^2 c_{12}^2}, \qquad \frac{l_1 + e_1}{k} = \frac{a_4 + a_1 - a_2 - a_0}{a_4 - a_1} = \frac{c_5^2 c_{23}^2}{c_4^2 c_{01}^2} - \frac{c_2^2 c_{14}^2}{c_4^2 c_{12}^2},$$

$$\frac{a_3 - a_0}{a_4 - a_1} = \frac{e_1 - e_3}{k} = \frac{c_0^2 c_{23}^2 c_{34}^2}{c_4^2 c_{01}^2 c_{12}^2}, \qquad \frac{l_1 + e_2}{k} = \frac{a_4 + a_1 - a_0 - a_3}{a_4 - a_1} = \frac{c_5^2 c_{23}^2}{c_4^2 c_{01}^2} - \frac{c_0^2 c_2^2}{c_{01}^2 c_{12}^2},$$

$$\frac{a_2 - a_0}{a_4 - a_1} = \frac{e_2 - e_3}{k} = \frac{c_5^2 c_{14}^2 c_{34}^2}{c_4^2 c_{01}^2 c_{12}^2}, \qquad \frac{l_1 + e_3}{k} = \frac{a_4 + a_1 - a_3 - a_2}{a_4 - a_2} = \frac{c_5^2 c_{03}^2}{c_4^2 c_{12}^2} - \frac{c_0^2 c_2^2}{c_{01}^2 c_{12}^2},$$

et, en posant

$$C = (a_3 - a_1)^{\frac{3}{2}} \frac{c_{01} c_{03} c_{12} c_{23} c_{14} c_{34}}{c_0^2 c_2^2 c_4^2},$$

on a

$$P_1 = \sqrt{(s_1 - e_1)(s_2 - e_1)} = \sqrt{(s_1 - a_3)(s_2 - a_3)} = -i \frac{C}{\sqrt{a_3 - a_1}} \frac{c_0 c_2 c_4}{c_{01} c_{12} c_{14}} \frac{\vartheta_3(v_1 v_2)}{\vartheta_5(v_1 v_2)},$$

$$P_2 = \sqrt{(s_1 - e_2)(s_2 - e_2)} = \sqrt{(s_1 - a_2)(s_2 - a_2)} = -i \frac{C}{\sqrt{a_3 - a_1}} \frac{c_5 c_2}{c_{12} c_{23}} \frac{\vartheta_2(v_1 v_2)}{\vartheta_5(v_1 v_2)},$$

$$P_3 = \sqrt{(s_1 - e_3)(s_2 - e_3)} = \sqrt{(s_1 - a_0)(s_2 - a_0)} = \frac{C}{\sqrt{a_3 - a_1}} \frac{c_5 c_0}{c_{01} c_{03}} \frac{\vartheta_0(v_1 v_2)}{\vartheta_5(v_1 v_2)},$$

$$P_4 = \sqrt{(s_1 - k_1)(s_2 - k_1)} = \sqrt{(s_1 - a_4)(s_2 - a_4)} = - \frac{C}{\sqrt{a_3 - a_1}} \frac{c_5 c_4}{c_{14} c_{34}} \frac{\vartheta_4(v_1 v_2)}{\vartheta_5(v_1 v_2)},$$

$$P_5 = \sqrt{(s_1 - k_2)(s_2 - k_2)} = \sqrt{(s_1 - a_1)(s_2 - a_1)} = \frac{C}{\sqrt{a_3 - a_1}} \frac{c_0 c_2 c_4}{c_{03} c_{23} c_{34}} \frac{\vartheta_1(v_1 v_2)}{\vartheta_5(v_1 v_2)},$$

$$P_{12} = \frac{\sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_2)} - \sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$

$$= iC\frac{c_5}{c_{12}}\frac{\vartheta_{23}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{13} = \frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_3)} - \sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_3)(s_2-e_2)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$

$$= -C\frac{c_5}{c_{01}}\frac{\vartheta_{03}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{14} = \frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-k_1)} - \sqrt{(s_1-e_1)(s_1-k_1)(s_2-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$

$$= -C\frac{c_5}{c_{14}}\frac{\vartheta_{34}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{15} = \frac{\sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_2-e_1)(s_2-k_2)} - \sqrt{(s_1-e_1)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}$$

$$= -C\frac{\vartheta_{13}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{23} = \frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-e_3)} - \sqrt{(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_2-e_1)(s_2-k_1)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$

$$= C\frac{c_5}{c_4}\frac{\vartheta_{02}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{24} = \frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_3)(s_1-k_2)(s_2-e_2)(s_2-k_1)} - \sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_2-e_1)(s_2-e_3)(s_2-k_2)}}{s_2-s_2}$$

$$= -C\frac{c_5}{c_0}\frac{\vartheta_{24}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{25} = \frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_2-e_2)(s_2-k_2)} - \sqrt{(s_1-e_2)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_3)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}$$

$$= C\frac{c_5}{c_{23}}\frac{\vartheta_{12}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{34} = \frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_1-k_2)(s_2-e_3)(s_2-k_1)} - \sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_1)(s_2-e_1)(s_2-e_2)(s_2-k_2)}}{s_1-s_2}$$

$$= -iC\frac{c_5}{c_2}\frac{\vartheta_{04}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},.$$

$$P_{35} = \frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_1-k_1)(s_2-e_3)(s_2-k_2)} - \sqrt{(s_1-e_3)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_1)(s_2-k_1)}}{s_1-s_2}$$

$$= -iC\frac{c_5}{c_{03}}\frac{\vartheta_{01}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)},$$

$$P_{45} = \frac{\sqrt{(s_1-e_1)(s_1-e_2)(s_1-e_3)(s_2-k_1)(s_2-k_2)} - \sqrt{(s_1-k_1)(s_1-k_2)(s_2-e_1)(s_2-e_2)(s_2-e_3)}}{s_1-s_2}$$

$$= -iC\frac{c_5}{c_{34}}\frac{\vartheta_{14}(v_1v_2)}{\vartheta_5(v_1v_2)}.$$

Les six quantités $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ une fois exprimées à l'aide des quotients $\frac{\vartheta_a(v_1, v_2)}{\vartheta(v_1, v_2)}$, dans lesquelles v_1, v_2 désignent des fonctions entières, linéaires du temps t, il s'agit de trouver les expressions des six autres cosinus $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$, en fonction du temps.

Ces quantités satisfont aux équations différentielles

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha' r - \alpha'' q, \qquad \frac{d\beta}{dt} = \beta' r - \beta'' q,$$

$$\frac{d\alpha'}{dt} = \alpha'' p - \alpha r, \qquad \frac{d\beta'}{dt} = \beta'' p - \beta r,$$

$$\frac{d\alpha''}{dt} = \alpha q - \alpha' p, \qquad \frac{d\beta''}{dt} = \beta q - \beta' p.$$

De ces équations il suit

$$\frac{d(\alpha+\beta i)}{dt} = (\alpha' + \beta' i)r - (\alpha'' + \beta'' i)q.$$

En divisant par $\alpha + \beta i$ et en remarquant que

$$(\alpha' + \beta' i)(\alpha - \beta i) = \alpha\alpha' + \beta\beta' + i(\alpha\beta' - \alpha'\beta) = -\gamma\gamma' + i\gamma'',$$
$$(\alpha'' + \beta'' i)(\alpha - \beta i) = \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + i(\alpha\beta'' - \alpha''\beta) = -\gamma\gamma'' - i\gamma',$$
$$(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2,$$

on trouve

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha + \beta i) = r\frac{-\gamma\gamma' + i\gamma''}{1-\gamma^2} + q\frac{\gamma\gamma'' + i\gamma'}{1-\gamma^2} = \frac{-\gamma\frac{d\gamma}{dt} + i(\gamma' q + \gamma'' r)}{1-\gamma^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{d\gamma}{dt} + i(\gamma' q + \gamma'' r)}{1+\gamma} - \frac{\frac{d\gamma}{dt} - i(\gamma' q + \gamma'' r)}{1-\gamma}\right\}.$$

De la même manière on trouve

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha' + \beta' i) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{d\gamma'}{dt} + i(\gamma p + \gamma'' r)}{1 + \gamma'} - \frac{\frac{d\gamma'}{dt} - i(\gamma p + \gamma'' r)}{1 - \gamma'}\right\},$$

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta'' i) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{d\gamma''}{dt} + i(\gamma p + \gamma' q)}{1 + \gamma''} - \frac{\frac{d\gamma''}{dt} - i(\gamma p + \gamma' q)}{1 - \gamma''}\right\}.$$

En portant dans les seconds membres de ces équations, les valeurs de $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$, exprimées en fonctions du temps, on voit que pour obtenir les valeurs de $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ il faut intégrer des fonctions rationnelles de quotients $\frac{\vartheta_a(t + c, c_1)}{\vartheta(t + c, c_1)}$.

On peut démontrer que chacune des six quantités $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ est une fonction uniforme du temps, n'ayant que des pôles pour des valeurs finies du temps.

D'après un théorème bien connu $f(t)$ est une fonction uniforme pouvant être représentée sous forme de quotient de deux séries convergentes pour toutes les valeurs finies de t, si la condition suivante est remplie:

$$\frac{d}{dt}\lg f(t)$$

peut être développée dans l'entourage de chaque valeur finie t_0 en série convergente de la forme

$$\frac{d}{dt}\lg f(t) = m(t - t_0)^{-1} + \mathfrak{P}(t - t_0)$$

où $\mathfrak{P}(t - t_0)$ désigne une série infinie ne contenant que des termes à exposant positif, et m est égal à zéro ou à un nombre entier positif ou négatif.

Or, tel est justement le cas pour les seconds membres des équations qui définissent

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha + \beta i), \frac{d}{dt}\lg(\alpha' + \beta' i), \frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta'' i)$$

en fonctions du temps.

Si l'on écrit dans ces seconds membres pour $\gamma, \gamma', \gamma'', p, q, r$ leurs valeurs en fonctions du temps et si, en supposant t dans le voisinage de t_0, on les développe en séries procédant selon les puissances de $t - t_0$, on voit immédiatement que des termes à exposant négatif ne pourront entrer dans ces développements que dans les deux cas suivants:

1) Si les développements de $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ contiennent des puissances négatives de $(t - t_0)$.

2) Si pour $t = t_0$ l'une des trois quantités $\gamma, \gamma', \gamma''$ est égale à ± 1. En ayant recours aux équations différentielles (1) et en écrivant τ au lieu de $t - t_0$, on voit que dans le 1[er] cas les développements de $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ doivent avoir la forme suivante:

$$\begin{aligned} p &= p_0\tau^{-1} + p_1 + p_2\tau + \cdots, & \gamma &= f_0\tau^{-2} + f_1\tau^{-1} + f_2 + \cdots, \\ q &= q_0\tau^{-1} + q_1 + q_2\tau + \cdots, & \gamma' &= g_0\tau^{-2} + g_1\tau^{-1} + g_2 + \cdots, \\ r &= r_0\tau^{-1} + r_1 + r_2\tau + \cdots, & \gamma'' &= h_0\tau^{-2} + h_1\tau^{-1} + h_2 + \cdots, \end{aligned}$$

où les coefficients $p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$ peuvent avoir ces deux systèmes différents de valeurs (voir § 1):

$$\text{I.} \qquad \begin{aligned} r_0 &= 0, & h_0 &= \pm i\frac{4}{c_0}, \\ q_0 &= \pm i2, & g_0 &= 0, \\ p_0 &= 0, & f_0 &= -\frac{4}{c_0}, \end{aligned}$$

$$\text{II.} \qquad \begin{aligned} q_0 &= \pm ip_0, & g_0 &= \pm if_0 = -\frac{r_0}{c_0} = \mp\frac{2i}{c_0}, \\ r_0 &= \pm 2i, & h_0 &= 0. \end{aligned}$$

En portant ces développements dans le second membre de l'équation

$$\frac{d\lg(\alpha'' + \beta''i)}{dt} = \frac{\gamma''\frac{d\gamma''}{dt} - i(\gamma p + \gamma' q)}{\gamma''^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{d\gamma''}{dt} - i(\gamma p + \gamma' q)}{\gamma'' - 1} + \frac{\frac{d\gamma''}{dt} + i(\gamma p + \gamma' q)}{\gamma'' + 1}\right\},$$

on voit que l'on a dans le cas I

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta''i) = -2\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau)$$

et dans le cas II

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta''i) = -\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau).$$

Examinons maintenant le développement de $\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta''i)$ dans le voisinage d'une valeur $t = t_0$ pour laquelle $\gamma'' = \pm 1$.

En général, si l'on pose

$$p = p_0 + p_1 t + \dots, \qquad \gamma = f_0 + f_1 t + \dots,$$
$$q = q_0 + q_1 t + \dots, \qquad \gamma' = g_0 + g_1 t + \dots,$$
$$r = r_0 + r_1 t + \dots, \qquad \gamma'' = h_0 + h_1 t + \dots,$$

les coefficients $p_1, q_1, r_1, f_1, g_1, h_1$ sont définis (en vertu des équations différentielles (1), § 2) en fonctions de $p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$ par les équations suivantes

$$2p_1 = q_0 r_0, \qquad f_1 = r_0 g_0 - q_0 h_0,$$
$$2q_1 = -p_0 r_0 - c_0 h_0, \qquad g_1 = p_0 h_0 - r_0 f_0,$$
$$r_1 = c_0 g_0, \qquad h_1 = q_0 f_0 - p_0 g_0.$$

Les trois quantités $\gamma, \gamma', \gamma''$ sont liées par l'équation

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1.$$

Leurs valeurs initiales f_0, g_0, h_0 sont donc aussi assujetties à la condition

$$f_0^2 + g_0^2 + h_0^2 = 1.$$

Désignons par ε_1 et par ε_2 deux quantités qui satisfont à l'équation

$$\varepsilon_1^2 = 1, \qquad \varepsilon_2^2 = 1.$$

Si je pose $h_0 = \varepsilon_1$ il faut donc que l'on ait en même temps $g_0 = \varepsilon_2 i f_0$ et l'on trouve alors

$$h_1 = -\varepsilon_2 i f_0(p_0 + \varepsilon_2 i q_0),$$
$$p_0 f_0 + q_0 g_0 = f_0(p_0 + \varepsilon_2 i q_0) = \varepsilon_2 i h_1.$$

Le développement du terme $\frac{1}{2}\frac{\frac{d\gamma''}{dt} - i\varepsilon_1(p\gamma + q\gamma')}{\gamma'' - \varepsilon_1}$ — qui seul peut contenir des puissances négatives de τ, a donc la forme

$$\frac{1 + \varepsilon_1\varepsilon_2}{2}\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau).$$

Si ε_1 et ε_2 ont même signe le coefficient de τ^{-1} est égal à $+ 1$.

Si ε_1 et ε_2 ont des signes contraires ce coefficient est nul.

On voit donc que dans tous les cas, le développement de

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta''i)$$

a la forme voulue

$$\frac{d}{dt}\lg(\alpha'' + \beta''i) = m(t - t_0)^{-1} + \mathfrak{P}(t - t_0),$$

d'où il résulte que $\alpha'' + \beta''i$ est une fonction uniforme du temps, pouvant être mise sous la forme d'un quotient de deux séries toujours convergentes.

On arrive au même résultat concernant $\alpha + \beta i$ et $\alpha' + \beta' i$.

Je me suis aussi assurée que ces quantités peuvent être exprimées en fonctions rationnelles des quantités de la forme

$$\frac{\vartheta_\alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2)}{\vartheta(u_1 u_2)} e^{u_3},$$

α étant l'index d'une de 16 fonctions $\vartheta(u_1 u_2)$, u_1, u_2, u_3 désignant des fonctions linéaires, entières du temps, et v_1, v_2 désignant des constantes imaginaires.

Mais à cause de la grande complication des calculs, je ne suis pas encore arrivée à développer ces formules sous leur forme finale.

§ 8.

Il peut être intéressant de réaliser sur un modèle un cas de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe où toutes les conditions du cas que nous venons d'étudier se trouvent remplies.

Dans les équations différentielles (1) les constantes A, B, C désignent les trois moments d'inertie principaux relativement au point fixe.

Soient maintenant A_1, B_1, C_1 les trois moments d'inertie principaux du même corps relativement à son centre de gravité et désignons par x, y, z les coordonnées d'un point dans un système d'axes de coordonnées dont l'origine se trouve au centre de gravité et dont les directions coïncident avec les trois axes d'inertie principaux passant par ce point.

On a alors, en désignant par μ la densité du corps considéré au point donc les coordonnées sont x, y, z,

$$A_1 = \iiint \mu(y^2 + z^2)dx dy dz, \qquad B_1 = \iiint \mu(z^2 + x^2)dx dy dz,$$

$$C_1 = \iiint \mu(x^2 + y^2)dx dy dz,$$

$$0 = \iiint \mu x dx dy dz, \qquad 0 = \iiint \mu y dx dy dz, \qquad 0 = \iiint \mu z dx dy dz,$$

$$0 = \iiint \mu yz dx dy dz, \qquad 0 = \iiint \mu zx dx dy dz, \qquad 0 = \iiint \mu xy dx dy dz.$$

Toutes ces intégrales triples doivent être étendues à tout l'intérieur du corps considéré.

Soient a, b, c les coordonnées d'un point O. Désignant par ξ, η, ζ les coordonnées d'un point de l'espace relativement à des axes parallèles aux précédents, mais dont l'origine coïncide avec le point O, on a

$$\xi = x - a, \qquad \eta = y - b, \qquad \zeta = z - c.$$

L'équation de l'ellipsoïde d'inertie dont le centre est en O est, comme on sait,

$$1 = A_1'\xi^2 + B_1'\eta^2 + C_1'\zeta^2 - 2D_1'\eta\zeta - 2E_1'\zeta\xi - 2F_1'\xi\eta = \varphi(\xi, \eta, \zeta),$$

les coëfficients A_1', B_1', ... étant définis par les équations

$$\begin{aligned}
A_1' &= \iiint \mu(\eta^2 + \zeta^2)d\xi d\eta d\zeta = A_1 + M(b^2 + c^2),\\
B_1' &= \iiint \mu(\zeta^2 + \xi^2)d\xi d\eta d\zeta = B_1 + M(c^2 + a^2),\\
C_1' &= \iiint \mu(\xi^2 + \eta^2)d\xi d\eta d\zeta = C_1 + M(a^2 + b^2),\\
D_1' &= \iiint \mu\eta\zeta d\xi d\eta d\zeta = Mbc,\\
E_1' &= \iiint \mu\zeta\xi d\xi d\eta d\zeta = Mca,\\
F_1' &= \iiint \mu\xi\eta d\xi d\eta d\zeta = Mab.
\end{aligned}$$

M désigne la masse totale du corps,

$$M = \iiint \mu \, d\xi \, d\eta \, d\zeta.$$

Soient maintenant u, v, w les coordonnées d'un point de l'espace relativement à des axes, dont l'origine est au point O, mais dont les directions coïncident avec les directions des axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie, correspondant à ce point. On a alors

$$\begin{aligned} u &= \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta, \\ v &= \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta, \\ w &= \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta, \end{aligned}$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda u^2 + \mu v^2 + \nu w^2,$$

λ, μ, ν étant des constantes positives.

De plus en désignant par u_0, v_0, w_0 les coordonnées du centre de gravité dans ce nouveau système, on a

$$\begin{aligned} -u_0 &= \alpha a + \beta b + \gamma c, \\ -v_0 &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c, \\ -w_0 &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c. \end{aligned}$$

Si nous imprimons maintenant au corps considéré un mouvement de rotation autour du point fixe O, les conditions du cas étudié par nous seront remplies, si l'on a

$$\lambda = \mu = 2\nu,$$

$$-w_0 = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c = 0.$$

On doit donc pouvoir satisfaire aux équations suivantes

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \nu[2(u^2 + v^2) + w^2], \qquad a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 0,$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = u^2 + v^2 + w^2, \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1.$$

Voyons si l'on peut choisir le point O de manière à ce que ces équations soient remplies.

Des deux premières de ces équations, il résulte

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) - 2\nu(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = -\nu w^2.$$

Cette dernière équation devant être satisfaite identiquement, si l'on écrit pour w sa valeur

$$w = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta,$$

on obtient, en égalant à zéro les coefficients de chaque terme dans cette identité, les équations suivantes:

$$A_1' - 2\nu = A_1 + M(b^2 + c^2) - 2\nu = -\nu\alpha_2^2,$$
$$B_1' - 2\nu = B_1 + M(c^2 + a^2) - 2\nu = -\nu\beta_2^2,$$
$$C_1' - 2\nu = C_1 + M(a^2 + b^2) - 2\nu = -\nu\gamma_2^2,$$

$$D_1' = Mbc = \nu\beta_2\gamma_2,$$
$$E_1' = Mca = \nu\gamma_2\alpha_2,$$
$$F_1' = Mab = \nu\alpha_2\beta_2.$$

Si aucune des trois constantes a, b, c (les coordonnées du point O) n'était nulle il résulterait des trois dernières équations

$$M^2a^2b^2c^2 = \nu^3\alpha_2^2\beta_2^2\gamma_2^2,$$

$$M^{\frac{1}{2}}a = \nu^{\frac{1}{2}}\alpha_2,$$

$$M^{\frac{1}{2}}b = \nu^{\frac{1}{2}}\beta_2,$$

$$M^{\frac{1}{2}}c = \nu^{\frac{1}{2}}\gamma_2,$$

ce qui est évidemment impossible par suite des équations

$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1,$$
$$a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = 0,$$

ni M ni ν ne pouvant être $= 0$.

Si nous supposons $c = 0$, mais a et b différents de 0, nous devon poser $\gamma_2 = 0$, et par conséquent

$$Mab = \nu\alpha_2\beta_2, \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \qquad a\alpha_2 + b\beta_2 = 0,$$

d'où il suit

$$\alpha_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \beta_2 = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

(le signe de $\sqrt{a^2 + b^2}$ étant déterminé arbitrairement)

$$M = \frac{-\nu}{a^2 + b^2},$$

équation impossible, vu que M et ν sont tous les deux des quantités positives.

Il faut donc supposer $b = 0$, $c = 0$. On a alors

$$A_1' = A_1, \qquad B_1' = B_1 + Ma^2, \qquad C_1'' = C_1 + Ma^2,$$
$$D_1' = 0, \qquad E_1' = 0, \qquad F_1' = 0,$$
$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = A_1\xi^2 + (B_1 + Ma^2)\eta^2 + (C_1 + Ma^2)\zeta^2.$$

Si les trois axes d'inertie principaux A_1, B_1, C_1 relatifs au centre de gravité du corps considéré satisfont à l'équation

$$A_1 = 2(B_1 - C_1),$$

on pourra satisfaire à toutes les conditions supposées par nous, en prenant

$$a^2 = \frac{A_1 - B_1}{M},$$

car on a dans ce cas

$$B_1 + Ma^2 = A_1, \qquad C_1 + Ma^2 = C_1 + A_1 - B_1 = \frac{1}{2}A_1,$$

par conséquent

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = A_1\left(\xi^2 + \eta^2 + \frac{1}{2}\zeta^2\right).$$

Remarquons seulement que pour que a soit réel, il faut et il suffit que l'on ait $B_1 > 2C_1$.

On voit donc, d'après ce calcul, qu'il est possible de réaliser mécaniquement toutes les conditions du problème que je viens d'étudier.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE

Ier Mémoire

PAR

VITO VOLTERRA

À PISE.

Introduction.

La représentation des fonctions de trois variables indépendantes par les *fonctions des points d'un espace à trois dimensions* est d'un usage très répandu parmi les analystes. Mais les points ne sont pas les seuls éléments géometriques de l'espace. Il y a aussi les lignes et les surfaces et l'on peut, de la même façon, faire correspondre à chaque point ou à chaque ligne ou à chaque surface les valeurs d'une variable. On obtient de la sorte des *fonctions des points* et aussi ce qu'on peut appeler des *fonctions des lignes* et des *fonctions des surfaces* de l'espace. On n'a appliqué jusqu'ici l'analyse qu'aux fonctions des points, mais il est bien intéressant aussi d'étudier les fonctions des lignes et les fonctions des surfaces. Ces fonctions se présentent dans plusieurs questions de physique. Par exemple l'énergie d'un courant qui parcourt un fil métallique qui peut se déplacer et se déformer dans un champ magnétique, est une fonction d'une ligne. Elles peuvent se rattacher aussi à des questions analytiques, par exemple on en trouve une application en généralisant la théorie des fonctions envisagée du point de vue de DIRICHLET [1] ou en

---

[1] Voir une Note que j'ai publiée: Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, Vol. 3. C'est en poursuivant ce but que j'ai été amené aux idées qui forment

cherchant à étendre aux intégrales doubles la théorie JACOBI-HAMILTON sur le calcul des variations. A présent je me borne à montrer l'usage qu'on peut en faire dans la théorie des fonctions des variables imaginaires.

---

la base de ce mémoire. Je me permets donc d'exposer en peu de mots le point de départ de mes recherches sur la généralisation de la théorie des fonctions. D'après la définition de DIRICHLET, on dit qu'une variable est fonction d'une autre variable, si à chaque valeur de cette quantité, entre des limites données, correspond une valeur de la première quantité. On est amené bien naturellement à cette définition, qui est indépendante de tout rapport analytique entre les variables, en considérant des phénomènes où il y a deux quantités qui changent simultanément de telle façon que les valeurs de l'une dépendent de celles de l'autre.

En se plaçant à un tel point de vue on est conduit aisément à généraliser l'idée de fonction parce que dans plusieurs questions de physique et d'analyse on trouve des *quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une fonction ordinaire ou de plusieurs fonctions ordinaires* tout à fait arbitraires. Par exemple la température dans un point d'une lame, qui est chauffée au bord, dépend de toutes les valeurs de la température au bord de la lame. Les fonctions des lignes offrent un autre exemple d'une telle dépendance. Il est bien clair que, lorsque on parle d'une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs variables, on entend quelque chose de bien différent d'une fonction de fonction.

J'ai tâché d'étudier la dépendance dont je viens de parler. En général on ne sait pas si, en partant de la fonction, on peut parvenir, par des procédés analytiques, à la quantité qui en dépend. Pourtant, sous certaines conditions, qui sont tout à fait semblables aux conditions nécessaires pour le développement en série de TAYLOR, on peut parvenir à généraliser cette série au cas que nous considérons. Par exemple, bornons-nous au cas le plus simple, c'est à dire d'une quantité y qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction $f(x)$, définie pour les valeurs de x comprises entre les limites a, b. Sous certaines conditions on peut donner pour y l'expression analytique

$$y = y_0 + \int_a f(t_1)\theta_1(t_1)dt_1 + \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b f(t_1)f(t_2)\theta_2(t_1, t_2)dt_1dt_2$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 3}\int_a^b\int_a^b\int_a^b f(t_1)f(t_2)f(t_3)\theta_3(t_1, t_2, t_3)dt_1dt_2dt_3 + \dots$$

où y_0 est une constante et les fonctions $\theta_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ sont des fonctions symétriques des variables $t_1, t_2, \dots, t_n$.

La série qu'on vient d'écrire n'est autre chose que la généralisation de la série de TAYLOR.

Dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, on suppose, en quelque sorte, que les valeurs des variables imaginaires sont étendues sur une surface, avec la condition que les rapports différentiels des variables ne dépendent que des points de la surface. C'est ainsi qu'on peut exprimer la condition de monogénéité établie par CAUCHY et que la théorie des variables imaginaires peut se rattacher à l'étude des paramètres différentiels et à l'étude des éléments caractéristiques.

Est-ce qu'on peut généraliser cette théorie en se rapportant à un espace à trois dimensions? Voilà le problème que je me suis proposé.

On peut résoudre la question, mais pour l'aborder il faut recourir à ce que je viens d'appeler les fonctions d'une ligne. En effet on obtient la généralisation en faisant correspondre à chaque ligne fermée de l'espace les valeurs de deux variables imaginaires liées entre elles par une condition différentielle tout à fait semblable à la condition de monogénéité de la théorie ordinaire.

Dans le mémoire qui va suivre je me suis borné à étendre la théorie aux espaces à trois dimensions, mais on peut aller plus loin dans la généralisation. La théorie des hyperespaces est depuis longtemps connue et beaucoup de mathématiciens sont à présent familiarisés avec les mots empruntés à la géométrie des espaces à n dimensions qui peuvent représenter d'une manière claire et frappante des propriétés analytiques. Cette considération m'a poussé à aborder même la théorie générale pour les hyperespaces dans un mémoire que je publierai plus tard. En se posant à un tel point de vue, les fonctions des lignes ne suffisent pas. Il faut recourir à une notion moins simple, c'est à dire aux *fonctions* des hyperespaces.

A quelle théorie connue va se rattacher la généralisation dont je viens de parler?

Il est bien aisé de montrer qu'elle se rattache à la théorie des fonctions de plusieurs variables imaginaires. Il y a presque une année M. POINCARÉ a publié dans ce journal un très beau mémoire sur la généralisation du théorème de CAUCHY pour les fonctions de deux variables imaginaires. Je vais montrer comment le remarquable théorème de M. POINCARÉ fait ressortir, tout de suite, une liaison entre la théorie que je me propose d'exposer et la théorie des fonctions de deux variables imaginaires.

Soit donnée une fonction de la variable $z = x + \sqrt{-1}\,y$ continue et uniforme dans une aire limitée par un seul contour. On déduit du théorème de CAUCHY que l'intégrale d'une telle fonction prise entre des limites imaginaires dépend des limites seulement. On obtient donc, par l'intégration d'une fonction des points du plan complexe, une nouvelle fonction des points. Est-ce la même chose pour les intégrales doubles?

M. POINCARÉ, en généralisant le théorème de CAUCHY, à démontré que l'intégrale d'une fonction uniforme de deux variables imaginaires prise sur une surface fermée est nulle, si l'on peut déformer et réduire la surface à un point sans rencontrer de singularités. On peut déduire de là que, si la surface d'intégration n'est pas fermée, l'intégrale dépend des lignes qui forment le contour de la surface. Donc on voit que l'intégration des fonctions de deux variables conduit aux fonctions des lignes. Les fonctions des lignes que j'ai étudiées, correspondent à tous les cas qui se présentent dans les intégrales doubles prises de la manière indiquée par M. POINCARÉ. Puisque ces fonctions des lignes dépendent seulement du bord de la surface d'intégration, j'ai donné *leur expression analytique par des éléments qui dépendent seulement du bord,* c'est à dire j'ai montré qu'elles peuvent s'exprimer par *des intégrales simples étendues à la ligne qui forme le bord.*

Il est bien aisé de voir que la généralisation de la théorie des intégrales abéliennes aux intégrales doubles, est une question liée aux principes fondamentaux que je vais exposer dans ce qui suit.

J'ai consacré le 1er chapitre du Mémoire à la théorie des fonctions des lignes. Le 2e chapitre est partagé en cinq articles. Dans le 1er article, après avoir établi la généralisation de la condition de monogénéité pour les fonctions des lignes, je trouve une relation différentielle analogue à $\Delta_2 = 0$. Dans le 3e et 6e article, en étudiant cette relation j'essaie une théorie des propriétés caractéristiques des fonctions des lignes. Enfin le 5e article contient la théorie des opérations différentielles.

Dans ce mémoire je n'ai pas abordé le cas d'un espace fermé d'une connexion multiple ni la généralisation du théorème d'ABEL qui en suit. Je remplirai cette lacune dans un autre mémoire.

Chapitre I.

Les fonctions des lignes.

Article 1[er].

1. Nous commencerons par quelques études générales sur les *fonctions des lignes* dans un espace à trois dimensions. Je me bornerai à considérer des lignes fermées qui n'ont pas de noeuds. Je ferai l'hypothèse que les coordonnées x, y, z des points de chaque ligne soient des fonctions continues de l'arc s de la courbe.

A chaque ligne L parcourue dans une direction donnée, correspondra la valeur d'une variable Φ. On doit supposer qu'en géneral en changeant la direction de la ligne, même sans la déplacer, la valeur correspondante de la variable Φ change aussi. Je désignerai cette correspondance par le *symbole*

$$\Phi = \Phi|[L]|.$$

On va trouver des variables Ψ dont les valeurs ne dépendent pas seulement des lignes L, mais aussi de la position d'un point variable A pris sur la ligne. On désignera une telle fonction par

$$\Psi = \Psi|[L, A]|.$$

Si la position du point est définie par la longueur s de l'arc compris entre le point variable et un point fixé sur L, on écrira aussi

$$\Psi = \Psi|[L, s]|.$$

2. Comment peut-on étendre aux fonctions des lignes les définitions de continuité et de dérivation?

C'est en poursuivant ce but, que je vais définir le *domaine* d'une ligne.

Une ligne fermée, enchaînée à L, en se déplaçant le long de L jusqu'à revenir dans sa première position, décrit une surface tubulaire. Le volume S compris dans une telle surface est ce que j'appelle un do-

maine de L. Toute ligne, comme L, qui parcourt le tube S dans le sens longitudinal est une *ligne longitudinale* de S.[1] Je dirai que $\Phi|[L]|$ est *continue* si, quelque petite que soit la quantité ε, on peut toujours déterminer un domaine S de L, tel que, pour toute ligne longitudinale L' de S, on ait

$$\mathrm{mod}\,|\,\Phi|[L']| - \Phi|[L]|\,| < \varepsilon.$$

Pour ce qui va suivre la condition de *continuité*, telle qu'on vient de la poser, n'est pas suffisante. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ les aires comprises entre les projections des deux courbes sur les plans coordonnés, $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$. Il faut supposer que le rapport

$$\frac{\mathrm{mod}\,|\,\Phi|[L']| - \Phi|[L]|\,|}{\sigma}$$

ne surpasse jamais une limite finie M.

Lorsque on a affaire à une fonction $\Phi|[L, s]|$, il y aura à considérer la continuité par rapport à la variable s, c'est à dire en laissant fixe la courbe L et supposant que le point A se déplace. Mais il faudra examiner aussi la condition de continuité lorsque on change A et L à la fois. Si A est un point situé à l'intérieur d'un champ T à trois dimensions, nous appellerons T un domaine de A. Nous dirons qu'il y a continuité, si, quelque petite que soit ε, on peut toujours déterminer un domaine S de L et un domaine S' de A, tels que, pour toute ligne longitudinale L' de S et pour chaque point A' de L' situé à l'intérieur de S' on ait

$$\mathrm{mod}\,|\,\Phi|[L', A']| - \Phi|[L, A]|\,| < \varepsilon.$$

3. Passons maintenant à la dérivation. Faisons passer par chaque point d'un arc $l = AB$ de L un segment de longueur Δx, parallèle à l'axe x. Le lieu des extrémités de ces segments est un arc CD. Soit

$$\Phi + \Delta_x \Phi$$

---

[1] Voilà ce que j'entends par une ligne fermée qui parcourt le tube S dans le sens longitudinal. Soit σ une section transversale du tube. Déplaçons σ de sorte qu'elle vienne engendrer le tube S, et supposons que dans le même temps un point A, pris dans l'aire σ, se déplace jusqu'à revenir dans sa position initiale. Nous dirons que la ligne décrite par A est une ligne qui parcourt le tube dans le sens longitudinal.

la valeur de la fonction qui correspond à la ligne qu'on déduit de L en remplaçant l'arc AB par la ligne $ACDB$ formée des droites AC, BD et de l'arc CD. Supposons que Δx et l tendent vers zéro en laissant A fixe et que

$$(1) \qquad \frac{\Delta_x \Phi}{\Delta x \, . \, l}$$

tende vers une limite X. On appellera une telle limite la ***dérivée de Φ par rapport à x***. Nous supposerons que cette limite ne dépende pas du côté de B par rapport à A ni de la manière dont Δx et l tendent vers zéro. Nous ferons encore l'hypothèse que, quelque petite que soit η, on peut déterminer une quantité ω, telle que pour toute ligne L et pour tout point A l'on ait

$$\mathrm{mod} \left| \frac{\Delta_x \Phi}{\Delta x \, . \, l} - X \right| < \eta$$

pour toutes les valeurs de Δx et de l comprises entre $-\omega$ et ω. En un mot nous supposerons que le rapport (1) tend vers la limite X *avec uniformité*.

Il est clair que la limite X dépendra en général de la ligne L et du point A. Nous la désignerons par

$$\Phi'_x|[L, s]|.$$

On trouvera de même les dérivées de Φ par rapport à y et par rapport à z qu'on désignera par

$$\Phi'_y|[L, s]|, \qquad \Phi'_z|[L, s]|.$$

Nous supposons les trois dérivées continues.

4. Soit $\xi(s)$ une fonction continue. Déplaçons chaque point d'une ligne L parallèlement à l'axe x d'une quantité

$$\delta x = \varepsilon \xi(s).$$

On trouvera une ligne L'. Nous allons chercher

$$\lim_{\varepsilon = 0} \frac{\Phi|[L']| - \Phi|[L]|}{\varepsilon}.$$

Partageons la ligne L en $2n$ parties $h_1, k_1; h_2, k_2, \ldots, h_n, k_n$ de sorte que tout intervalle $h_i = a_i b_i$ soit compris entre les intervalles k_{i-1}, k_i. Posons

$$\sum_1^n k_i = \partial.$$

Soit s_i la longueur de l'arc compris entre les points $a_i a_1$ compté dans la direction $(a_i a_{i+1} \ldots a_1)$. Par chaque point de l'arc h_i conduisons un segment de longueur $\varepsilon\xi(s_i)$ parallèle à l'axe x. On trouvera un arc $h'_i = a'_i b'_i$. Remplaçons les arcs h_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ par les lignes formées des droites $a_i a'_i$, $b_i b'_i$ et de l'arc h'_i. On aura une ligne L_p. Il est clair qu'on peut écrire

$$\Phi|[L_n]| - \Phi|[L]| = \sum_1^n \{\Phi|[L_p]| - |[L_{p-1}]|\}$$

où L_0 signifie L.

Mais

$$\Phi|[L_p]| - \Phi|[L_{p-1}]| = \varepsilon h_p \xi(s_p)\{\Phi'_x|[L_{p-1}, s_p]| + \eta_p\}.$$

Il suffit de prendre $\varepsilon < \frac{\omega}{N}$, $h_p < \omega$, N étant le maximum de $\xi(s)$, pour que

$$\text{mod } \eta_p < \eta.$$

On aura aussi

$$\Phi'_x|[L_{p-1}, s_p]| = \Phi'_x|[L, s_p]| + \eta'_p$$

et, en prenant ω suffisamment petit, en vertu de la continuité de la dérivée, on aura

$$\text{mod } \eta'_p < \eta.$$

Par la condition qu'on a posée après la continuité de Φ (§ 2) on peut écrire

$$\text{mod } |\Phi|[L']| - \Phi|[L_n]|| < M\left(\partial\varepsilon N + \sum_1^n h_p D_p\right)$$

en désignant par D_p l'oscillation de la fonction $\xi(s)$ dans l'intervalle h_p. On en déduit

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi|[L']| - \Phi|[L]|}{\varepsilon} = \int_L \xi(s)\Phi'_x|[L, s]|ds.$$

De même si on donne à chaque point de L un déplacement

$$\delta y = \varepsilon \eta(s)$$

parallèlement à l'axe y, en passant de la courbe L à la courbe L'' on trouvera

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi|[L'']| - \Phi|[L]|}{\varepsilon} = \int_L \eta(s) \Phi'_y |[L, s]| ds.$$

Enfin, en supposant que par des déplacements $\delta z = \varepsilon\zeta(s)$ parallèles à l'axe z on obtient la courbe L''', nous pouvons écrire

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi|[L''']| - \Phi|[L]|}{\varepsilon} = \int_L \zeta(s) \Phi'_z |[L, s]| ds.$$

5. Supposons maintenant que les déplacements des points de L aient pour composantes dans les directions des trois axes

$$\delta x = \varepsilon\xi(s), \qquad \delta y = \varepsilon\eta(s), \qquad \delta z = \varepsilon\zeta(s)$$

et qu'on trouve d'une telle façon une courbe L^{IV}. On peut démontrer bien aisément que

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi|[L^{\text{IV}}]| - \Phi|[L]|}{\varepsilon} = \int_L (\Phi'_x\xi + \Phi'_y\eta + \Phi'_z\zeta) ds.$$

Le résultat que nous venons de trouver peut s'énoncer aussi de la manière suivante.

Soit

(A) $$\delta\Phi = \int_L (\Phi'_x \delta x + \Phi'_y \delta y + \Phi'_z \delta z) ds,$$

la quantité

$$\delta\Phi - \{\Phi|[L^{\text{IV}}]| - \Phi|[L]|\}$$

est un infiniment petit d'ordre supérieur à ε.

C'est pourquoi on appelera $\delta\Phi$ la *variation de* Φ.

6. Nous allons chercher maintenant à quelles conditions doivent satisfaire les trois dérivées Φ'_x, Φ'_y, Φ'_z.

Si par le déplacement infiniment petit des points de la ligne L cette ligne ne change pas, on aura $\delta\Phi = 0$. En posant

$$\delta x = \lambda \frac{dx}{ds} ds, \qquad \delta y = \lambda \frac{dy}{ds} ds, \qquad \delta z = \lambda \frac{dz}{ds} ds,$$

on aura donc, pour une valeur arbitraire de λ

$$0 = \int_L \left(\Phi'_x \frac{dx}{ds} + \Phi'_y \frac{dy}{ds} + \Phi'_z \frac{dz}{ds} \right) \lambda ds.$$

On tirera de là

$$\Phi'_x \frac{dx}{ds} + \Phi'_y \frac{dy}{ds} + \Phi'_z \frac{dz}{ds} = 0,$$

c'est à dire, si t est la tangente de L,

$$\alpha = \cos tx = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \cos ty = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \cos tz = \frac{dz}{ds},$$

on aura

$$\Phi'_x \alpha + \Phi'_y \beta + \Phi'_z \gamma = 0. \tag{2}$$

L'égalité qu'on vient de trouver n'est pas la seule condition à laquelle les trois dérivées doivent satisfaire, mais c'est la seule dont nous nous servirons dans le cours du mémoire. Il est bien intéressant de déterminer d'autres propriétés des dérivées par exemple celles qu'on trouve en introduisant les dérivées d'ordre supérieur.[1]

Article 2.

1. L'égalité (2) de l'article 1er permet de poser les équations

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi'_x &= \gamma B - \beta C, \\ \Phi'_y &= \alpha C - \gamma A, \\ \Phi'_z &= \beta A - \alpha B. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

[1] Voir la Note citée et l'autre: *Sopra le funzioni dipendenti da Linee.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. 3.

Les inconnues A, B, C ne sont pas déterminées par les égalités (3). Si A_1, B_1, C_1 vérifient ces équations, les solutions générales sont

$$A = A_1 + k\alpha, \qquad B = B_1 + k\beta, \qquad C = C_1 + k\gamma,$$

k étant une quantité arbitraire.

D'après les égalités (3) on pourra remplacer (A) par

$$(\mathrm{A}') \qquad \partial\Phi = \int_L \{A(\beta\partial z - \gamma\partial y) + B(\gamma\partial x - \alpha\partial z) + C(\alpha\partial y - \beta\partial x)\} ds.$$

2. Par le déplacement $(\partial x, \partial y, \partial z)$ l'arc ds décrit un parallélogramme infiniment petit.

Supposons qu'un point en parcoure le périmètre de sorte qu'il se déplace sur ds dans la direction positive. Soit $d\sigma$ l'aire du parallélogramme. Si l'on conduit la normale n au parallélogramme en prenant pour direction positive celle d'un observateur qui voit le point mobile se déplacer dans le sens des aiguilles d'une montre, on aura

$$\begin{cases} (\beta\partial z - \gamma\partial y) ds = \cos nx \,.\, d\sigma, \\ (\gamma\partial x - \alpha\partial z) ds = \cos ny \,.\, d\sigma, \\ (\alpha\partial y - \beta\partial x) ds = \cos nz \,.\, d\sigma. \end{cases}$$

Examinons maintenant la bande infiniment petite σ décrite de la ligne L par le déplacement. n en sera la normale et $d\sigma$ la différentielle de l'aire. On aura donc

$$(4) \qquad \partial\Phi = \int_\sigma (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz) d\sigma.$$

3. Soient L_1 et L_2 deux courbes. Si on déplace L_1 jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec L_2, même en direction, L_1 décrira une surface Σ. J'appelle cette opération *mener une surface par* L_1 *et* L_2.

En suivant L_1 dans son mouvement, on peut déterminer pour tout point de la surface Σ des valeurs pour A, B, C. On peut supposer que le déplacement total soit résultant de déplacements infiniment petits.

Appliquant à chaque déplacement infiniment petit la formule (4), on trouvera

$$\Phi|[L_2]| - \Phi|[L_1]| = \int_\Sigma (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz) d\Sigma. \tag{5}$$

Article 3.

1. Il faut maintenant distinguer deux cas qui se présentent dans l'étude des fonctions des lignes. Soient L_1 et L_2 deux lignes qui ont un arc l commun. Si on doit parcourir l en directions contraires en supposant qu'il appartienne aux deux lignes, on pourra retrancher l et obtenir une courbe L_3 dont la direction même sera déterminée. On écrira

$$L_3 = L_1 + L_2.$$

Le premier cas se présentera si l'égalité

$$\Phi|[L_3]| = \Phi|[L_1]| + \Phi|[L_2]| \tag{6}$$

est toujours réalisée. J'appelle dans un tel cas Φ une *fonction du* 1er *degré*.

Le deuxième cas se présentera si l'égalité (6) n'est pas toujours vérifiée. Nous allons borner nos recherches aux fonctions du 1er degré. Supposons que deux lignes L_1 et L_2 se coupent dans un point M. Soient ds_1, ds_2 les éléments linéaires des deux lignes en M. Posons

$$\Phi'_x|[L_1, M]| = X_1, \qquad \Phi'_y|[L_1, M]| = Y_1, \qquad \Phi'_z|[L_1, M]| = Z_1,$$
$$\Phi'_x|[L_2, M]| = X_2, \qquad \Phi'_y|[L_2, M]| = Y_2, \qquad \Phi'_z|[L_2, M]| = Z_2,$$
$$\cos(ds_1, x) = \alpha_1, \qquad \cos(ds_1, y) = \beta_1, \qquad \cos(ds_1, z) = \gamma_1,$$
$$\cos(ds_2, x) = \alpha_2, \qquad \cos(ds_2, y) = \beta_2, \qquad \cos(ds_2, z) = \gamma_2.$$

On donne à tout point de l'arc ds_1 un déplacement ds_2. Nous nous proposons de chercher quelle est la variation de Φ. Si on appelle cette variation $\delta_{12}\Phi$, on aura

$$\delta_{12}\Phi = (X_1\alpha_2 + Y_1\beta_2 + Z_1\gamma_2) ds_2 ds_1.$$

De même la variation de Φ correspondante au déplacement ds_1 des points de l'arc ds_2 sera donnée par

$$\partial_{21}\Phi = (X_2\alpha_1 + Y_2\beta_1 + Z_2\gamma_1)ds_1 ds_2.$$

Je nomme λ le contour du parallélogramme dont les côtés sont ds_1 et ds_2. Si Φ est du 1[er] degré, on aura

$$-\partial_{12}\Phi = \partial_{21}\Phi = \Phi|[\lambda]|$$

d'où

$$(7) \qquad 0 = X_1\alpha_2 + Y_1\beta_2 + Z_1\gamma_2 + X_2\alpha_1 + Y_2\beta_1 + Z_2\gamma_1.$$

Mais on peut écrire

$$X_1 = \gamma_1 B_1 - \beta_1 C_1, \qquad Y_1 = \alpha_1 C_1 - \gamma_1 A_1, \qquad Z_1 = \beta_1 A_1 - \alpha_1 B_1,$$

$$X_2 = \gamma_2 B_2 - \beta_2 C_2, \qquad Y_2 = \alpha_2 C_2 - \gamma_2 A_2, \qquad Z_2 = \beta_2 A_2 - \alpha_2 B_2.$$

Par suite l'égalite (7) pourra s'écrire

$$(8) \qquad 0 = (A_1 - A_2)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + (B_1 - B_2)(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) + (C_1 - C_2)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$$

d'où

$$(8') \qquad (A_1 - A_2)\cos nx + (B_1 - B_2)\cos ny + (C_1 - C_2)\cos nz = 0,$$

n étant la normale aux lignes L_1, L_2 en M.

2. Cela posé, prenons trois lignes L_x, L_y, L_z qui se coupent en M, dont les tangentes en M sont parallèles aux axes coordonnées. On aura

$$\Phi'_y|[L_x, M]| = C_x, \qquad \Phi'_z|[L_x, M]| = -B_x,$$

$$\Phi'_z|[L_y, M]| = A_y, \qquad \Phi'_x|[L_y, M]| = -C_y,$$

$$\Phi'_x|[L_z, M]| = B_z, \qquad \Phi'_y|[L_z, M]| = -A_z.$$

L'égalité (8') appliquée aux couples de lignes (L_y, L_z), (L_z, L_x), (L_x, L_y) donne

$$A_y = A_z, \qquad B_z = B_x, \qquad C_x = C_y.$$

Nous posons

$$A_y = A_z = p, \qquad B_z = B_x = q, \qquad C_x = C_y = r.$$

Soit L une ligne arbitraire qui passe par M. Supposons réalisées les égalités (3) et posons

$$\cos(L, x) = \alpha, \qquad \cos(L, y) = \beta, \qquad \cos(L, z) = \gamma.$$

En appliquant l'égalité (8') aux couples de lignes $(L, L_x), (L, L_y), (L, L_z)$, il est bien clair qu'on trouve

$$(B - q)\gamma - (C - r)\beta = 0,$$
$$(C - r)\alpha - (A - p)\gamma = 0,$$
$$(A - p)\beta - (B - q)\alpha = 0,$$

d'où

$$p = A + k\alpha, \qquad q = B + k\beta, \qquad r = C + k\gamma.$$

Nous pouvons donc remplacer A, B, C par p, q, r dans les équations (3). On en déduit le théorème:

Soit Φ une fonction du 1er degré des lignes, on peut déterminer pour tout point M de l'espace trois quantités p, q, r telles que les conditions

$$\Phi'_x|[L, M]| = q\gamma - r\beta,$$
$$\Phi'_y|[L, M]| = r\alpha - p\gamma,$$
$$\Phi'_z|[L, M]| = p\beta - q\alpha$$

soient remplies pour toute ligne qui passe par M.

3. Par deux lignes L_1, L_2, menons une surface Σ. On tire de l'égalité (5)

$$\text{(B)} \qquad \Phi|[L_2]| - \Phi|[L_1]| = \int_\Sigma (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz)\, d\Sigma.$$

Si L_1 en décroissant indéfiniment tend vers un point, on aura

$$\lim \Phi|[L_1]| = 0,$$

d'où

$$\text{(B')} \qquad \Phi|[L_2]| = \int_\Sigma (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz)\, d\Sigma.$$

Dans un tel cas L_2 est le contour de la surface Σ. Pour déterminer la direction positive de n par rapport à L_2 imaginons, comme on fait en électrodynamique, L_2 personnifié par une poupée qui regarde la surface. n ira de la droite à la gauche. Supposons de nouveau que la surface Σ en décroissant tende vers un point M. On aura

$$\lim \frac{\Phi\|[L_2]\|}{\Sigma} = p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz,$$

en prenant les valeurs p, q, r qui correspondent au point M. On appellera $\lim \frac{\Phi\|[L_2]\|}{\Sigma}$ la *dérivée de Φ par rapport à Σ* et on la représentera par $\frac{d\Phi}{d\Sigma}$. Il est évident que le signe dont la dérivée est affectée n'est déterminé que lorsque on connait la direction positive de la normale à la surface Σ. Prenons la dérivée de Φ par rapport à une surface Σ normale à l'axe x en M; on aura

$$\frac{d\Phi}{d\Sigma} = p.$$

De même si Σ_1 et Σ_2 sont des surfaces normales aux axes y et z, on aura

$$\frac{d\Phi}{d\Sigma_1} = q, \qquad \frac{d\Phi}{d\Sigma_2} = r.$$

C'est pourquoi on peut désigner p, q, r par

$$\frac{d\Phi}{d(y, z)}, \frac{d\Phi}{d(z, x)}, \frac{d\Phi}{d(x, y)},$$

et on peut les appeler les *dérivées de Φ par rapport aux plans coordonnés.*

4. A quelles conditions doivent satisfaire les trois dérivées p, q, r? Conduisons une surface σ limitée par un contour L. On aura

$$\Phi\|L\| = \int_\sigma (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz) d\sigma.$$

Si l'on fait diminuer L jusqu'à devenir un point, σ devient une surface

fermée. D'ailleurs $\Phi|[L]|$ tend vers zéro. On aura donc, si σ est une surface fermée

$$\int_\sigma (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz) d\sigma = 0.$$

Soit S le volume limité par σ, on aura par une transformation bien connue,

$$\int_\sigma (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz) d\sigma = \pm \int_S \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right) dS$$

et en conséquence

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Réciproquement il est bien clair que si l'on suppose l'égalité (C) réalisée par p, q, r, on peut trouver, dans toute portion de l'espace limitée par un seul contour où p, q, r n'ont pas de singularités, une fonction de 1er degré dont p, q, r sont les dérivées prises par rapport aux plans coordonnées.

Par les symboles introduits dans cet article on peut donc écrire

$$\text{(C')} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{d\Phi}{d(y, z)} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{d\Phi}{d(z, x)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{d\Phi}{d(x, y)} = 0.$$

Article 4.

1. Proposons-nous la question de la transformation des dérivées

$$\frac{d\Phi}{d(y, z)}, \quad \frac{d\Phi}{d(z, x)}, \quad \frac{d\Phi}{d(x, y)}$$

par le changement des coordonnées.

Supposons que, par les équations

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = y(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = z(\xi, \eta, \zeta)$$

on établisse une correspondance continue et univoque entre deux espaces limités ou illimités. A chaque ligne L du premier espace (x, y, z)

correspond une ligne Λ dans l'autre (ξ, η, ζ). Par suite à une fonction $\Phi|[L]|$ de 1[er] degré dans l'espace (x, y, z) correspond une fonction $\Phi|[\Lambda]|$ de 1[er] degré dans l'autre (ξ, η, ζ). Il faut chercher les relations qui ont lieu entre

$$p = \frac{d\Phi}{d(y, z)}, \qquad q = \frac{d\Phi}{d(z, x)}, \qquad r = \frac{d\Phi}{d(x, y)}$$

et

$$\frac{d\Phi}{d(\eta, \zeta)}, \frac{d\Phi}{d(\zeta, \xi)}, \frac{d\Phi}{d(\xi, \eta)}.$$

A cet effet prenons une surface S limitée par L et la surface correspondante Σ dans l'autre espace qui sera limitée par Λ. Individualisons les points de la surface par deux paramètres u, v. On aura

$$\Phi|[L]| = \int_S [p\cos(nx) + q\cos(ny) + r\cos(nz)]dS.$$

Posons [1]

$$\frac{d(y, z)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \frac{d(z, x)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \frac{d(x, y)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

On trouvera

$$\Phi|[L]| = \int_S \left\{ p\frac{d(y, z)}{d(u, v)} + q\frac{d(z, x)}{d(u, v)} + r\frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right\} du\,dv.$$

Soit

$$\varpi = p\frac{d(y, z)}{d(\eta, \zeta)} + q\frac{d(z, x)}{d(\eta, \zeta)} + r\frac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)},$$

$$\chi = p\frac{d(y, z)}{d(\zeta, \xi)} + q\frac{d(z, x)}{d(\zeta, \xi)} + r\frac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)},$$

$$\rho = p\frac{d(y, z)}{d(\xi, \eta)} + q\frac{d(z, x)}{d(\xi, \eta)} + r\frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)}.$$

---

[1] Dans ce mémoire nous représenterons toujours le déterminant fonctionel des variables $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $\frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

L'équation (B') peut s'écrire

$$\Phi[L] = \int_S \left\{ \tilde{\omega} \frac{d(\eta, \zeta)}{d(u, v)} + \chi \frac{d(\zeta, \xi)}{d(u, v)} + \rho \frac{d(\xi, \eta)}{d(u, v)} \right\} du\, dv.$$

Mais on a

$$\Phi[L] = \Phi'[\Lambda];$$

par suite, si ν est normale à Σ, on aura

$$\Phi[\Lambda] = \int_\Sigma \{\tilde{\omega} \cos(\nu\xi) + \chi \cos(\nu\eta) + \rho \cos(\nu\zeta)\} d\Sigma,$$

d'où

$$\tilde{\omega} = \frac{d\Phi}{d(\eta, \zeta)}, \qquad \chi = \frac{d\Phi}{d(\zeta, \xi)}, \qquad \rho = \frac{d\Phi}{d(\xi, \eta)}.$$

Voilà donc les relations qu'on cherchait:

$$(D)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Phi}{d(\eta, \zeta)} = \dfrac{d\Phi}{d(y, z)} \dfrac{d(y, z)}{d(\eta, \zeta)} + \dfrac{d\Phi}{d(z, x)} \dfrac{d(z, x)}{d(\eta, \zeta)} + \dfrac{d\Phi}{d(x, y)} \dfrac{d(x, y)}{d(\eta, \zeta)}, \\[2ex] \dfrac{d\Phi}{d(\zeta, \xi)} = \dfrac{d\Phi}{d(y, z)} \dfrac{d(y, z)}{d(\zeta, \xi)} + \dfrac{d\Phi}{d(z, x)} \dfrac{d(z, x)}{d(\zeta, \xi)} + \dfrac{d\Phi}{d(x, y)} \dfrac{d(x, y)}{d(\zeta, \xi)}, \\[2ex] \dfrac{d\Phi}{d(\xi, \eta)} = \dfrac{d\Phi}{d(y, z)} \dfrac{d(y, z)}{d(\xi, \eta)} + \dfrac{d\Phi}{d(z, x)} \dfrac{d(z, x)}{d(\xi, \eta)} + \dfrac{d\Phi}{d(x, y)} \dfrac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)}. \end{cases}$$

Article 5.

1. On sait qu'en posant

$$p = \frac{d\Phi}{d(y, z)}, \qquad q = \frac{d\Phi}{d(z, x)}, \qquad r = \frac{d\Phi}{d(x, y)},$$

on a

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Il sera donc possible de trouver deux fonctions λ, μ par les conditions

$$(9)\qquad \frac{d(\lambda, \mu)}{d(y, z)} = p, \qquad \frac{d(\lambda, \mu)}{d(z, x)} = q, \qquad \frac{d(\lambda, \mu)}{d(x, y)} = r.$$

A cet effet il suffit d'employer la méthode donnée par JACOBI dans la théorie du *multiplicateur*. On prend μ de sorte que

$$p\frac{\partial\mu}{\partial x}+q\frac{\partial\mu}{\partial y}+r\frac{\partial\mu}{\partial z}=0,$$

et puis

$$\lambda=\int\frac{1}{\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)}(pdy-qdx)+F(\mu),$$

F étant une fonction arbitraire. (Voir JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, Gesammelte Werke, Supplementband, page 78). Si on prend des variables ξ,η,ζ au lieu de x,y,z, on trouvera

$$\frac{d(\lambda,\mu)}{d(\eta,\zeta)}=\frac{d(\lambda,\mu)}{d(y,z)}\frac{d(y,z)}{d(\eta,\zeta)}+\frac{d(\lambda,\mu)}{d(z,x)}\frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)}+\frac{d(\lambda,\mu)}{d(x,y)}\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}=\tilde{\omega}.$$

De même

$$\frac{d(\lambda,\mu)}{d(\zeta,\xi)}=\chi=\frac{d\Phi}{d(\zeta,\xi)},\qquad\frac{d(\lambda,\mu)}{d(\xi,\eta)}=\rho=\frac{d\Phi}{d(\xi,\eta)}.$$

On en déduit que les relations entre λ,μ et les dérivées de Φ ne changent pas par un changement de variables.

2. Sur une surface σ prenons les coordonnées curvilignes u,v. Soit $ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ le carré de l'élément linéaire. On aura

$$\frac{d\Phi}{d\sigma}=p\cos nx+q\cos ny+r\cos nz=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{d(\lambda,\mu)}{d(u,v)}.$$

Il est évident que sur une surface où $\lambda=$ const. on a $\frac{d\Phi}{d\sigma}=0$.

3. Posons

$$\lambda\frac{\partial\mu}{\partial x}=a,\qquad\lambda\frac{\partial\mu}{\partial y}=b,\qquad\lambda\frac{\partial\mu}{\partial z}=c,$$

on aura

$$\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}=p,\qquad\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}=q,\qquad\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}=r.$$

Soit L le contour d'une surface σ, on peut écrire

$$\Phi|[L]| = \int_\sigma (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz) d\sigma,$$

d'où, par le théorème de STOKES

$$\text{(E)} \qquad \Phi|[L]| = \int_L (adx + bdy + cdz) = \int_L \lambda d\mu.$$

Chapitre II.

Liaison d'isogénéité.

Article 1er.

1. Pour généraliser la théorie ordinaire des fonctions monogènes aux espaces à trois dimensions, supposons que nous ayons deux variables imaginaires qui soient des fonctions de 1er dégré des lignes de l'espace. Nous allons établir une condition tout à fait semblable à la condition de ***monogénéité***. A cet effet soient F et Φ les valeurs des deux fonctions correspondantes à une ligne L. Déformons un arc AB de L et désignons par ΔF et $\Delta\Phi$ les variations de F et de Φ. Si en diminuant indéfiniment la déformation et la distance entre B et le point fixe A, le rapport $\frac{\Delta F}{\Delta \Phi}$ tend vers une limite qui dépend seulement du point A, on dira que les deux variables ont une *liaison d'isogénéité,* ou qu'elles sont *isogènes.*

Il est bien clair que si Φ et Ψ ont une liaison d'isogénéité avec F, Φ et Ψ sont isogènes.

2. Il faut chercher maintenant les propriétés qu'on peut déduire de la définition qu'on a posée.

Les relations qu'on va trouver sont tout à fait semblables à celles qu'on a dans le cas de deux variables imaginaires liées par la condition ordinaire de monogénéité. On trouvera même une relation différentielle

qui est analogue à l'équation différentielle $\Delta_2 = 0$. Je vais rappeler en peu de mots la méthode qu'on peut suivre dans le cas ordinaire, pour trouver ces relations, pour en montrer l'analogie avec la marche que je suivrai dans le cas des fonctions des lignes.

Soient f et φ deux variables imaginaires fonctions des points d'une surface. On supposera les points de cette surface rapportés à des coordonnées curvilignes u et v. Décomposons f et φ dans leurs parties réelles et imaginaires. On aura

$$f = f_1 + if_2, \qquad \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2.$$

Posons

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = p_1, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial v} = q_1; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = p_2, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial v} = q_2,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = \tilde{\omega}_1, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = \chi_1; \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \tilde{\omega}_2, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = \chi_2.$$

En prenant les dérivées de f et de φ dans une direction quelconque s on aura

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (p_1 + ip_2)\frac{\partial u}{\partial s} + (q_1 + iq_2)\frac{\partial v}{\partial s},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = (\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2)\frac{\partial u}{\partial s} + (\chi_1 + i\chi_2)\frac{\partial v}{\partial s}.$$

Si maintenant φ est une fonction monogène de f, le rapport

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} : \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{(\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2)\frac{\partial u}{\partial s} + (\chi_1 + i\chi_2)\frac{\partial v}{\partial s}}{(p_1 + ip_2)\frac{\partial u}{\partial s} + (q_1 + iq_2)\frac{\partial v}{\partial s}}$$

doit être indépendant de la direction s. On en déduit

$$\frac{\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2}{p_1 + ip_2} = \frac{\chi_1 + i\chi_2}{q_1 + iq_2}.$$

On tire de là par des calculs bien simples

$$(2^*) \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_2 = \dfrac{(p_1^2 + p_2^2)\chi_1 - (p_1 q_1 + p_2 q_2)\tilde{\omega}_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2}, \\[2ex] \chi_2 = -\dfrac{(q_1^2 + q_2^2)\tilde{\omega}_1 - (p_1 q_1 + p_2 q_2)\chi_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2}. \end{cases}$$

En posant pour abréger

$$(3^*)\quad \begin{cases} p_1^2 + p_2^2 = E_{11}, \qquad p_1 q_1 + p_2 q_2 = E_{12}, \qquad q_1^2 + q_2^2 = E_{22}, \\ \qquad\qquad p_2 q_1 - p_1 q_2 = D, \end{cases}$$

on aura

$$(A_1^*)\quad \begin{cases} \tilde{\omega}_2 = \dfrac{E_{11}\chi_1 - E_{12}\tilde{\omega}_1}{D}, \\ \chi_2 = -\dfrac{E_{22}\tilde{\omega}_1 - E_{12}\chi_1}{D}. \end{cases}$$

De même on trouve

$$(A_2^*)\quad \begin{cases} \tilde{\omega}_1 = \dfrac{E_{12}\tilde{\omega}_2 - E_{11}\chi_2}{D}, \\ \chi_1 = -\dfrac{E_{12}\chi_2 - E_{22}\tilde{\omega}_2}{D}. \end{cases}$$

Les quantités $\tilde{\omega}_2, \chi_2$ satisfont à la condition

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial v} - \frac{\partial \chi_2}{\partial u} = 0;$$

c'est pourquoi on aura

$$(5^*)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{E_{22}\tilde{\omega}_1 - E_{12}\chi_1}{D}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E_{11}\chi_1 - E_{12}\tilde{\omega}_1}{D}\right] = 0,$$

c'est à dire

$$(C^*)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{E_{22}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} - E_{12}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}}{D}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E_{11}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} - E_{12}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}}{D}\right] = 0.$$

Cette équation est la condition $\Delta_2 \varphi_1 = 0$. De même on trouve

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{E_{22}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} - E_{12}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}}{D}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E_{11}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} - E_{12}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}}{D}\right] = 0,$$

c'est à dire $\Delta_2 \varphi_2 = 0$.

Il est bien facile de démontrer que, si φ_1 est une fonction qui satisfait à l'équation (C^*), on peut toujours déterminer une fonction φ_2, telle que $\varphi_1 + i\varphi_2$ soit une fonction monogène de $f_1 + if_2$.

Les coefficients E_{11}, E_{12}, E_{22} sont en général des fonctions de u et v, mais il est toujours possible, par un changement des coordonnées u, v, de rendre ces coefficients constants. En particulier on peut ramener l'équation (C') à la forme $\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial v^2} = 0$.

3. Passons maintenant aux calculs analogues pour les deux variables imaginaires F et Φ qui ont une liaison d'isogénéité.

A cet effet décomposons F et Φ dans leurs parties réelles et imaginaires. On aura

$$\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2, \qquad F = F_1 + iF_2.$$

Posons

$$\frac{dF_1}{d(y,z)} = p_1, \qquad \frac{dF_1}{d(z,x)} = q_1, \qquad \frac{dF_1}{d(x,y)} = r_1,$$

$$\frac{dF_2}{d(y,z)} = p_2, \qquad \frac{dF_2}{d(z,x)} = q_2, \qquad \frac{dF_2}{d(x,y)} = r_2,$$

$$\frac{d\Phi_1}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_1, \qquad \frac{d\Phi_1}{d(z,x)} = \chi_1, \qquad \frac{d\Phi_1}{d(x,y)} = \rho_1,$$

$$\frac{d\Phi_2}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_2, \qquad \frac{d\Phi_2}{d(z,x)} = \chi_2, \qquad \frac{d\Phi_2}{d(x,y)} = \rho_2.$$

Pour réaliser la condition de monogénéité, il faut que le rapport

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} : \frac{dF}{d\sigma} = \frac{(\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2)\cos nx + (\chi_1 + i\chi_2)\cos ny + (\rho_1 + i\rho_2)\cos nz}{(p_1 + ip_2)\cos nx + (q_1 + iq_2)\cos ny + (r_1 + ir_2)\cos nz}$$

soit indépendant de la direction n. C'est pourquoi il faut poser

$$\frac{\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2}{p_1 + ip_2} = \frac{\chi_1 + i\chi_2}{q_1 + iq_2} = \frac{\rho_1 + i\rho_2}{r_1 + ir_2},$$

d'où

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} q_1\tilde{\omega}_1 - q_2\tilde{\omega}_2 = p_1\chi_1 - p_2\chi_2, & q_2\tilde{\omega}_1 + q_1\tilde{\omega}_2 = p_2\chi_1 + p_1\chi_2, \\ r_1\chi_1 - r_2\chi_2 = q_1\rho_1 - q_2\rho_2, & r_2\chi_1 + r_1\chi_2 = q_2\rho_1 + q_1\rho_2, \\ p_1\rho_1 - p_2\rho_2 = r_1\tilde{\omega}_1 - r_2\tilde{\omega}_2, & p_2\rho_1 + p_1\rho_2 = r_2\tilde{\omega}_1 + r_1\tilde{\omega}_2. \end{array} \right.$$

4. En résolvant ces équations par rapport à $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$, on trouve

$$(2)\quad \begin{cases} \tilde{\omega}_2 = \dfrac{(p_1^2 + p_2^2)\chi_1 - (p_1 q_1 + p_2 q_2)\tilde{\omega}_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2} = -\dfrac{(p_1^2 + p_2^2)\rho_1 - (p_1 r_1 + p_2 r_2)\tilde{\omega}_1}{r_2 p_1 - p_2 r_1}, \\[2ex] \chi_2 = \dfrac{(q_1^2 + q_2^2)\rho_1 - (q_1 r_1 + q_2 r_2)\chi_1}{q_2 r_1 - q_1 r_2} = -\dfrac{(q_1^2 + q_2^2)\tilde{\omega}_1 - (q_1 p_1 + q_2 p_2)\chi_1}{p_2 q_1 - q_2 p_1}, \\[2ex] \rho_2 = \dfrac{(r_1^2 + r_2^2)\tilde{\omega}_1 - (r_1 p_1 + r_2 p_2)\rho_1}{r_2 p_1 - r_1 p_2} = -\dfrac{(r_1^2 + r_2^2)\chi_1 - (r_1 q_1 + r_2 q_2)\rho_1}{q_2 r_1 - r_2 q_1}. \end{cases}$$

Posons pour abréger

$$(3)\quad \begin{cases} p_1^2 + p_2^2 = E_{11}, \quad q_1^2 + q_2^2 = E_{22}, \quad r_1^2 + r_2^2 = E_{33}, \\ q_1 r_1 + q_2 r_2 = E_{23} = E_{32}, \quad r_1 p_1 + r_2 p_2 = E_{31} = E_{13}, \\ p_1 q_1 + p_2 q_2 = E_{12} = E_{21}, \\ q_2 r_1 - q_1 r_2 = D_1, \quad r_2 p_1 - r_1 p_2 = D_2, \quad p_2 q_1 - p_1 q_2 = D_3, \end{cases}$$

on aura

$$(4)\quad \begin{cases} E_{11} D_1 + E_{12} D_2 + E_{13} D_3 = 0, \\ E_{21} D_1 + E_{22} D_2 + E_{23} D_3 = 0, \\ E_{31} D_1 + E_{32} D_2 + E_{33} D_3 = 0, \end{cases}$$

$$(4')\quad \begin{cases} D_1^2 = E_{22} E_{33} - E_{23}^2, \\ D_2^2 = E_{33} E_{11} - E_{31}^2, \\ D_3^2 = E_{11} E_{22} - E_{12}^2, \end{cases} \qquad (4'')\quad \begin{cases} D_2 D_3 = E_{12} E_{13} - E_{11} E_{23}, \\ D_3 D_1 = E_{23} E_{21} - E_{22} E_{31}, \\ D_1 D_2 = E_{31} E_{32} - E_{33} E_{12}. \end{cases}$$

Substituons les valeurs (3) dans les formules (2), on trouvera

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{E_{11}\chi_1 - E_{12}\tilde{\omega}_1}{D_3} = -\frac{E_{11}\rho_1 - E_{13}\tilde{\omega}_1}{D_2},$$

$$\chi_2 = \frac{E_{22}\rho_1 - E_{23}\chi_1}{D_1} = -\frac{E_{22}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\chi_1}{D_3},$$

$$\rho_2 = \frac{E_{33}\tilde{\omega}_1 - E_{31}\rho_1}{D_2} = -\frac{E_{33}\chi_1 - E_{32}\rho_1}{D_1}.$$

En employant les équations (4) on pourra écrire

$$
(\mathrm{A}_1)\quad
\begin{cases}
\tilde{\omega}_2 = \dfrac{E_{12}\rho_1 - E_{13}\chi_1}{D_1} = \dfrac{E_{13}\tilde{\omega}_1 - E_{11}\rho_1}{D_2} = \dfrac{E_{11}\chi_1 - E_{12}\tilde{\omega}_1}{D_3}, \\[2ex]
\chi_2 = \dfrac{E_{22}\rho_1 - E_{23}\chi_1}{D_1} = \dfrac{E_{23}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\rho_1}{D_2} = \dfrac{E_{21}\chi_1 - E_{22}\tilde{\omega}_1}{D_3}, \\[2ex]
\rho_2 = \dfrac{E_{32}\rho_1 - E_{33}\chi_1}{D_1} = \dfrac{E_{33}\tilde{\omega}_1 - E_{31}\rho_1}{D_2} = \dfrac{E_{31}\chi_1 - E_{32}\tilde{\omega}_1}{D_3}.
\end{cases}
$$

On a de même

$$
(\mathrm{A}_2)\quad
\begin{cases}
\tilde{\omega}_1 = \dfrac{E_{13}\chi_2 - E_{12}\rho_2}{D_1} = \dfrac{E_{11}\rho_2 - E_{13}\tilde{\omega}_2}{D_2} = \dfrac{E_{12}\tilde{\omega}_2 - E_{11}\chi_2}{D_3}, \\[2ex]
\chi_1 = \dfrac{E_{23}\chi_2 - E_{22}\rho_2}{D_1} = \dfrac{E_{21}\rho_2 - E_{23}\tilde{\omega}_2}{D_2} = \dfrac{E_{22}\tilde{\omega}_2 - E_{21}\chi_2}{D_3}, \\[2ex]
\rho_1 = \dfrac{E_{33}\chi_2 - E_{32}\rho_2}{D_1} = \dfrac{E_{31}\rho_2 - E_{33}\tilde{\omega}_2}{D_2} = \dfrac{E_{32}\tilde{\omega}_2 - E_{31}\chi_2}{D_3}.
\end{cases}
$$

On déduit des égalités (A_2)

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}_1 D_1 &= E_{13}\chi_2 - E_{12}\rho_2, \\
\chi_1 D_2 &= E_{21}\rho_2 - E_{23}\tilde{\omega}_2, \\
\rho_1 D_3 &= E_{32}\tilde{\omega}_2 - E_{31}\chi_2,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
(\mathrm{B}_1)\qquad D_1\tilde{\omega}_1 + D_2\chi_1 + D_3\rho_1 = 0.
$$

De même on a

$$
(\mathrm{B}_2)\qquad D_1\tilde{\omega}_2 + D_2\chi_2 + D_3\rho_2 = 0.
$$

5. On a démontré (voir Chap. I, article 3) que les quantités $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ doivent remplir les conditions

$$
\frac{\partial\tilde{\omega}_1}{\partial x} + \frac{\partial\chi_1}{\partial y} + \frac{\partial\rho_1}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial\chi_2}{\partial y} + \frac{\partial\rho_2}{\partial z} = 0;
$$

on aura donc d'après (A_1)

$$(5)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{12}\rho_1 - E_{13}\chi_1}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\rho_1}{D_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{31}\chi_1 - E_{32}\tilde{\omega}_1}{D_3}\right) = 0.$$

Par les égalités (A_1) on voit que cette équation peut s'écrire d'autres façons équivalentes. De même les quantités $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ doivent satisfaire à une équation analogue à l'équation (5).

L'équation (5) peut s'écrire, par les symboles du premier chapitre,

$$(C)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{12}\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)} - E_{13}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)} - E_{21}\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)}}{D_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{31}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)} - E_{32}\dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)}}{D_3}\right) = 0$$

et Φ_2 remplira la même condition. On peut donc énoncer la proposition:

Si Φ et F ont une liaison d'isogénéité, en décomposant Φ en ses parties réelle et imaginaire, on trouve deux fonctions qui remplissent les mêmes conditions. Ces conditions sont les suivantes

$$(D)\quad D_1\frac{d\Psi}{d(y,z)} + D_2\frac{d\Psi}{d(z,x)} + D_3\frac{d\Psi}{d(x,y)} = 0,$$

$$(C)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{12}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)} - E_{13}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)}}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)} - E_{21}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)}}{D_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{31}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)} - E_{32}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)}}{D_3}\right) = 0.$$

Réciproquement:

Si Ψ est une fonction réelle des lignes qui remplit les conditions (D), (C) *on peut déterminer une fonction réelle P des lignes, telle que $\Psi + iP$ et F soient isogènes.*

En effet, en vertu de l'égalité (C) on pourra poser

$$\frac{dP}{d(y,z)} = \frac{E_{12}\frac{d\Psi}{d(x,y)} - E_{13}\frac{d\Psi}{d(z,x)}}{D_1},$$

$$\frac{dP}{d(z,x)} = \frac{E_{23}\frac{d\Psi}{d(y,z)} - E_{21}\frac{d\Psi}{d(x,y)}}{D_2},$$

$$\frac{dP}{d(x,y)} = \frac{E_{31}\frac{d\Psi}{d(z,x)} - E_{32}\frac{d\Psi}{d(y,z)}}{D_3}.$$

On tire de là, en vertu de l'équation (D),

$$\frac{\frac{d\Psi}{d(y,z)} + i\frac{dP}{d(y,z)}}{p_1 + ip_2} = \frac{\frac{d\Psi}{d(z,x)} + i\frac{dP}{d(z,x)}}{q_1 + iq_2} = \frac{\frac{d\Psi}{d(x,y)} + i\frac{dP}{d(x,y)}}{r_1 + ir_2};$$

par conséquent le rapport

$$\frac{\frac{dA}{d(y,z)}\cos nx + \frac{dA}{d(z,x)}\cos ny + \frac{dA}{d(x,y)}\cos nz}{\frac{dF}{d(y,z)}\cos nx + \frac{dF}{d(z,x)}\cos ny + \frac{dF}{d(x,y)}\cos nz}$$

est indépendant de la direction n, A étant égal à $\Psi + iP$.

C. Q. F. D.

On voit donc que la théorie que nous venons d'exposer est liée à celle des équations (D) et (C), de même que la théorie ordinaire se rapporte à celle de l'équation $\Delta_2 = 0$.

6. Soit maintenant Φ_1 une fonction des lignes du 1er degré telle que la condition (D) soit réalisée.

Supposons qu'on ne sache pas si elle remplit la condition (C). Quelles sont les formules des paragraphes précédents qu'on pourra toujours conserver? Posons

$$\frac{d\Phi_1}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_1, \qquad \frac{d\Phi_1}{d(z,x)} = \chi_1, \qquad \frac{d\Phi_1}{d(x,y)} = \rho_1.$$

Il est bien clair que toutes les formules des §§ 3 et 4 peuvent être conservées.

Il faut remarquer seulement *qu'on ne saura pas si les quantités* $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ *qui se trouvent dans ces formules sont les dérivées d'une fonction des lignes prises par rapport aux plans coordonnées.* Si, au contraire la condition (C) est remplie, alors seulement la condition de l'intégrabilité

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0$$

sera remplie aussi, et par suite $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ seront les dérivées d'une fonction Φ_2 telle que $\Phi_1 + i\Phi_2$ et F aient une liaison d'isogénéité. Nous allons employer cette remarque dans les articles suivants.

Article 2.

1. Dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire il y a deux paramètres différentiels du premier ordre qui jouent un rôle bien important.

Si on se rapporte aux notations du § 2, article 1[er], les deux paramètres sont les suivants

$$\Delta_1 \Psi = \frac{E_{22}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial u}\right)^2 - 2E_{12}\frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial \Psi}{\partial v} + E_{11}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial v}\right)^2}{D^2},$$

$$\Delta_1 \Psi\theta = \frac{E_{22}\frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial u} - E_{12}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial \Psi}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u}\right) + E_{11}\frac{\partial \Psi}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial v}}{D^2}.$$

Les propriétés de ces paramètres sont bien connues. En supposant, comme dans le § 2, article 1[er], que $\varphi_1 + i\varphi_2$ soit une fonction monogène de $f_1 + if_2$, on a

$$\Delta_1 \varphi_1 = \Delta_1 \varphi_2.$$

Il est aussi bien connu que le problème suivant du calcul des variations: déterminer la fonction Ψ, dont les valeurs sont connues au contour du champ σ, en sorte que $J = \frac{1}{2}\int_\sigma D\Delta_1 \Psi du dv$ soit minimum, conduit à l'équation

$$\Delta_2 \Psi = 0$$

lorsque le problème peut se résoudre par une fonction Ψ finie dont les dérivées secondes sont intégrables.

2. Nous allons examiner deux paramètres différentiels qui dans notre théorie jouent le rôle des paramètres différentiels du 1[er] ordre dans la théorie ordinaire. A cet effet supposons que les deux fonctions réelles Φ_1, Φ'_1 remplissent les conditions

$$(6) \qquad D_1 \frac{d\Phi_1}{d(y,z)} + D_2 \frac{d\Phi_1}{d(z,x)} + D_3 \frac{d\Phi_1}{d(x,y)} = 0,$$

$$(6') \qquad D_1 \frac{d\Phi'_1}{d(y,z)} + D_2 \frac{d\Phi'_1}{d(z,x)} + D_3 \frac{d\Phi'_1}{d(x,y)} = 0.$$

Posons

$$\frac{d\Phi_1}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_1, \qquad \frac{d\Phi_1}{d(z,x)} = \chi_1, \qquad \frac{d\Phi_1}{d(x,y)} = \rho_1,$$

$$\frac{d\Phi'_1}{d(y,z)} = \tilde{\omega}'_1, \qquad \frac{d\Phi'_1}{d(z,x)} = \chi'_1, \qquad \frac{d\Phi'_1}{d(x,y)} = \rho'_1.$$

En vertu de ce qu'on vient de dire à la fin de l'article précédent, on pourra écrire toutes les formules des §§ 3 et 4 et même celles qu'on obtient de ces formules en posant un suffixe aux lettres $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$. Posons

$$H_{\Phi_1\Phi'_1} = \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix} \chi'_2, \rho'_2 \\ \chi_1, \rho_1 \end{vmatrix}.$$

Nous aurons par les formules (A_1)

$$(E') \qquad H = -\frac{1}{D_1 D_2 D_3}\{D_1 E_{23}\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}'_1 + D_2 E_{31}\chi_1\chi'_1 + D_3 E_{12}\rho_1\rho'_1\}$$

$$= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3}\{D_1 E_{23}\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}'_2 + D_2 E_{31}\chi_2\chi'_2 + D_3 E_{12}\rho_2\rho'_2\}.$$

On tire de là

$$H = \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix} \chi'_2, \rho'_2 \\ \chi_1, \rho_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_2}\begin{vmatrix} \rho'_2, \tilde{\omega}'_2 \\ \rho_1, \tilde{\omega}_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_3}\begin{vmatrix} \tilde{\omega}'_2, \chi'_2 \\ \tilde{\omega}_1, \chi_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix} \chi_2, \rho_2 \\ \chi'_1, \rho'_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_2}\begin{vmatrix} \rho_2, \tilde{\omega}_2 \\ \rho'_1, \tilde{\omega}'_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_3}\begin{vmatrix} \tilde{\omega}_2, \chi_2 \\ \tilde{\omega}'_1, \chi'_1 \end{vmatrix}.$$

Par suite on trouve

$$(E'')\quad H = \frac{1}{2D_1D_2D_3}\{D_1E_{11}(\rho_1\chi'_1+\rho'_1\chi_1)+D_2E_{22}(\tilde\omega_1\rho'_1+\tilde\omega'_1\rho_1)+D_3E_{33}(\chi_1\tilde\omega'_1+\chi'_1\tilde\omega_1)\}$$

$$= \frac{1}{2D_1D_2D_3}\{D_1E_{11}(\rho_2\chi'_2+\rho'_2\chi_2)+D_2E_{22}(\tilde\omega_2\rho'_2+\tilde\omega'_2\rho_2)+D_3E_{33}(\chi_2\tilde\omega'_2+\chi'_2\tilde\omega_2)\}$$

$$= \frac{E_{22}\rho_1\rho'_1 - E_{23}(\rho_1\chi'_1+\chi_1\rho'_1)+E_{33}\chi_1\chi'_1}{D_1^2} = \frac{E_{33}\tilde\omega_1\tilde\omega'_1 - E_{31}(\tilde\omega_1\rho'_1+\rho_1\tilde\omega'_1)+E_{11}\rho_1\rho'_1}{D_2^2}$$

$$= \frac{E_{11}\chi_1\chi'_1 - E_{12}(\chi_1\tilde\omega'_1+\tilde\omega_1\chi'_1)+E_{22}\tilde\omega_1\tilde\omega'_1}{D_3^2} = \frac{E_{22}\rho_2\rho'_2 - E_{23}(\rho_2\chi'_2+\chi_2\rho'_2)+E_{33}\chi_2\chi'_2}{D_1^2}$$

$$= \frac{E_{33}\tilde\omega_2\tilde\omega'_2 - E_{31}(\tilde\omega_2\rho'_2+\rho_2\tilde\omega'_2)+E_{11}\rho_2\rho'_2}{D_2^2} = \frac{E_{11}\chi_2\chi'_2 - E_{12}(\chi_2\tilde\omega'_2+\tilde\omega_2\chi'_2)+E_{22}\tilde\omega_2\tilde\omega'_2}{D_3^2}$$

$$= \frac{(q_1\rho'_1 - r_1\chi'_1)(q_1\rho_1 - r_1\chi_1)+(q_2\rho'_1 - r_2\chi'_1)(q_2\rho_1 - r_2\chi_1)}{D_1^2}$$

$$= \frac{(r_1\tilde\omega'_1 - p_1\rho'_1)(r_1\tilde\omega_1 - p_1\rho_1)+(r_2\tilde\omega'_1 - p_2\rho'_1)(r_2\tilde\omega_1 - p_2\rho_1)}{D_2^2}$$

$$= \frac{(p_1\chi'_1 - q_1\tilde\omega'_1)(p_1\chi_1 - q_1\tilde\omega_1)+(p_2\chi'_1 - q_2\tilde\omega'_1)(p_2\chi_1 - q_2\tilde\omega_1)}{D_3^2}$$

$$= \frac{(q_1\rho'_2 - r_1\chi'_2)(q_1\rho_2 - r_1\chi_2)+(q_2\rho'_2 - r_2\chi'_2)(q_2\rho_2 - r_2\chi_2)}{D_1^2}$$

$$= \frac{(r_1\tilde\omega'_2 - p_1\rho'_2)(r_1\tilde\omega_2 - p_1\rho_2)+(r_2\tilde\omega'_2 - p_2\rho'_2)(r_2\tilde\omega_2 - p_2\rho_2)}{D_2^2}$$

$$= \frac{(p_1\chi'_2 - q_1\tilde\omega'_2)(p_1\chi_2 - q_1\tilde\omega_2)+(p_2\chi'_2 - q_2\tilde\omega'_2)(p_2\chi_2 - q_2\tilde\omega_2)}{D_3^2}.$$

En employant les symboles introduits dans le 1er chapitre on pourra écrire

$$H_{\Phi_1\Phi'_1}$$

$$= \frac{E_{22}\frac{d\Phi_1}{d(x,y)}\frac{d\Phi'_1}{d(x,y)} - E_{23}\left(\frac{d\Phi_1}{d(x,y)}\frac{d\Phi'_1}{d(z,x)}+\frac{d\Phi_1}{d(z,x)}\frac{d\Phi'_1}{d(x,y)}\right)+E_{33}\frac{d\Phi_1}{d(z,x)}\frac{d\Phi'_1}{d(z,x)}}{D_1^2}$$

$$= \text{etc.}$$

3. Posons maintenant $\Phi_1' = \Phi_1$ et remplaçons H par θ_{Φ_1}. On trouvera

(F)
$$\theta_{\Phi_1} = \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix} \chi_2 , \rho_2 \\ \chi_1 , \rho_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_2}\begin{vmatrix} \rho_2 , \tilde{\omega}_2 \\ \rho_1 , \tilde{\omega}_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_3}\begin{vmatrix} \tilde{\omega}_2 , \chi_2 \\ \tilde{\omega}_1 , \chi_1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3}\{D_1 E_{23}\tilde{\omega}_1^2 + D_2 E_{31}\chi_1^2 + D_3 E_{12}\rho_1^2\}$$

$$= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3}\{D_1 E_{23}\tilde{\omega}_2^2 + D_2 E_{31}\chi_2^2 + D_3 E_{12}\rho_2^2\}$$

$$= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3}\{D_1 E_{11}\chi_1\rho_1 + D_2 E_{22}\rho_1\tilde{\omega}_1 + D_3 E_{33}\tilde{\omega}_1\chi_1\}$$

$$= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3}\{D_1 E_{11}\chi_2\rho_2 + D_2 E_{22}\rho_2\tilde{\omega}_2 + D_3 E_{33}\tilde{\omega}_2\chi_2\}$$

$$= \frac{E_{22}\rho_1^2 - 2E_{23}\rho_1\chi_1 + E_{33}\chi_1^2}{D_1^2} = \frac{E_{33}\tilde{\omega}_1^2 - 2E_{31}\tilde{\omega}_1\rho_1 + E_{11}\rho_1^2}{D_2^2} = \frac{E_{11}\chi_1^2 - 2E_{12}\chi_1\tilde{\omega}_1 + E_{22}\tilde{\omega}_1^2}{D_3^2}$$

$$= \frac{E_{22}\rho_2^2 - 2E_{23}\rho_2\chi_2 + E_{33}\chi_2^2}{D_1^2} = \frac{E_{33}\tilde{\omega}_2^2 - 2E_{31}\tilde{\omega}_2\rho_2 + E_{11}\rho_2^2}{D_2^2} = \frac{E_{11}\chi_2^2 - 2E_{12}\chi_2\tilde{\omega}_2 + E_{22}\tilde{\omega}_2^2}{D_3^2}$$

$$= \frac{(q_1\rho_1 - r_1\chi_1)^2 + (q_2\rho_1 - r_2\chi_1)^2}{D_1^2} = \frac{(r_1\tilde{\omega}_1 - p_1\rho_1)^2 + (r_2\tilde{\omega}_1 - p_2\rho_1)^2}{D_2^2}$$

$$= \frac{(p_1\chi_1 - q_1\tilde{\omega}_1)^2 + (p_2\chi_1 - q_2\tilde{\omega}_1)^2}{D_3^2} = \frac{(q_1\rho_2 - r_1\chi_2)^2 + (q_2\rho_2 - r_2\chi_2)^2}{D_1^2}$$

$$= \frac{(r_1\tilde{\omega}_2 - p_1\rho_2)^2 + (r_2\tilde{\omega}_2 - p_2\rho_2)^2}{D_2^2} = \frac{(p_1\chi_2 - q_1\tilde{\omega}_2)^2 + (p_2\chi_2 - q_2\tilde{\omega}_2)^2}{D_3^2}.$$

Il est évident, par les dernières formules, que θ_{Φ_1} est une quantité positive.

A l'aide des symboles du premier chapitre on peut écrire

$$\theta_{\Phi_1} = \frac{E_{22}\left(\frac{d\Phi_1}{d(x, y)}\right)^2 - 2E_{23}\frac{d\Phi_1}{d(x, y)}\frac{d\Phi_1}{d(z, x)} + E_{33}\left(\frac{d\Phi_1}{d(z, x)}\right)^2}{D_1^2} = \text{etc.}$$

4. Il faut démontrer maintenant que H et θ ne changent pas par un changement de variables. Soient $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ les nouvelles variables. Désignons les quantités relatives aux nouvelles variables par les mêmes lettres qui désignent les quantités analogues qui ont rapport aux variables x, y, z, en plaçant un trait horizontal au dessus de chaque lettre.

Des formules trouvées dans le 1[er] chapitre, article 4, on déduira par un calcul très simple

$$(7)\quad \begin{cases} \overline{D}_1 = \dfrac{d(x,y,z)}{d(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}\left(D_1 \dfrac{\partial x}{\partial \overline{x}} + D_2 \dfrac{\partial y}{\partial \overline{x}} + D_3 \dfrac{\partial z}{\partial \overline{x}}\right), \\ \overline{D}_2 = \dfrac{d(x,y,z)}{d(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}\left(D_1 \dfrac{\partial x}{\partial \overline{y}} + D_2 \dfrac{\partial y}{\partial \overline{y}} + D_3 \dfrac{\partial z}{\partial \overline{y}}\right), \\ \overline{D}_3 = \dfrac{d(x,y,z)}{d(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}\left(D_1 \dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}} + D_2 \dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}} + D_3 \dfrac{\partial z}{\partial \overline{z}}\right). \end{cases}$$

De même en posant

$$M_1 = \chi_2'\rho_1 - \rho_2'\chi_1, \qquad M_2 = \rho_2'\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2'\rho_1, \qquad M_3 = \tilde{\omega}_2'\chi_1 - \chi_2'\tilde{\omega}_1,$$

$$\Delta_1 = \chi_2\rho_1 - \rho_2\chi_1, \qquad \Delta_2 = \rho_2\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2\rho_1, \qquad \Delta_3 = \tilde{\omega}_2\chi_1 - \chi_2\tilde{\omega}_1,$$

on trouvera

$$\overline{M}_1 = \frac{d(x,y,z)}{d(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}\left(M_1 \frac{\partial x}{\partial \overline{x}} + M_2 \frac{\partial y}{\partial \overline{x}} + M_3 \frac{\partial z}{\partial \overline{x}}\right),$$

$$\overline{M}_2 = \frac{d(x,y,z)}{d(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}\left(M_1 \frac{\partial x}{\partial \overline{y}} + M_2 \frac{\partial y}{\partial \overline{y}} + M_3 \frac{\partial z}{\partial \overline{y}}\right),$$

$$\overline{M}_3 = \frac{d(x,y,z)}{d(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}\left(M_1 \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + M_2 \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} + M_3 \frac{\partial z}{\partial \overline{z}}\right),$$

$$\overline{\Delta}_1 = \frac{d(x,y,z)}{d(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}\left(\Delta_1 \frac{\partial x}{\partial \overline{x}} + \Delta_2 \frac{\partial y}{\partial \overline{x}} + \Delta_3 \frac{\partial z}{\partial \overline{x}}\right).$$

$$\overline{\Delta}_2 = \frac{d(x,y,z)}{d(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}\left(\Delta_1 \frac{\partial x}{\partial \overline{y}} + \Delta_2 \frac{\partial y}{\partial \overline{y}} + \Delta_3 \frac{\partial z}{\partial \overline{y}}\right).$$

$$\overline{\Delta}_3 = \frac{d(x,y,z)}{d(\overline{x},-,\overline{z})}\left(\Delta_1 \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \Delta_2 \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} + \Delta_3 \frac{\partial z}{\partial \overline{z}}\right).$$

Par suite, en vertu des relations (E′) on aura

$$\overline{H} = \frac{\overline{M}_1}{\overline{D}_1} = \frac{M_1 \dfrac{\partial x}{\partial \overline{x}} + M_2 \dfrac{\partial y}{\partial \overline{x}} + M_3 \dfrac{\partial z}{\partial \overline{x}}}{D_1 \dfrac{\partial x}{\partial \overline{x}} + D_2 \dfrac{\partial y}{\partial \overline{x}} + D_3 \dfrac{\partial z}{\partial \overline{x}}} = \frac{M_1}{D_1} = H,$$

$$\overline{\theta} = \frac{\overline{\Delta}_1}{\overline{D}_1} = \frac{\Delta_1 \dfrac{\partial x}{\partial \overline{x}} + \Delta_2 \dfrac{\partial y}{\partial \overline{x}} + \Delta_3 \dfrac{\partial z}{\partial \overline{x}}}{D_1 \dfrac{\partial x}{\partial \overline{x}} + D_2 \dfrac{\partial y}{\partial \overline{x}} + D_3 \dfrac{\partial z}{\partial \overline{x}}} = \frac{\Delta_1}{D_1} = \theta.$$

C. Q. F. D.

5. Si Φ_1 et Φ'_1 remplissent la condition (C) on peut déterminer Φ_2, Φ'_2 de manière que $\Phi_1 + i\Phi_2$, $\Phi'_1 + i\Phi'_2$, F aient une liaison d'isogénéité. On a, lorsque ce cas se présente,

$$H_{\Phi_1\Phi_1'} = H_{\Phi_2\Phi_2'}, \qquad H_{\Phi_1\Phi_2'} = - H_{\Phi_2\Phi_1'}.$$

$$\theta_{\Phi_1} = \theta_{\Phi_2}.$$

Article 3.

1. On tire des formules (7)

$$(8) \qquad \overline{D}_1 d\bar{x} + \overline{D}_2 d\bar{y} + \overline{D}_3 d\bar{z} = \frac{d(x, y, z)}{d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}(D_1 dx + D_2 dy + D_3 dz).$$

Cette égalité démontre que si l'équation

$$(9) \qquad D_1 dx + D_2 dy + D_3 dz = 0$$

est intégrable, cette propriété se maintient après le changement des variables.

Nous nous proposons d'examiner dans cet article le cas général. Nous examinerons dans l'article suivant le cas qui se présente si l'équation (9) est intégrable.

2. Supposons réalisées les conditions (6) et (6') du 1[er] paragraphe de l'article précédent. Posons les équations différentielles

$$(10) \qquad \begin{cases} E_{11}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + E_{12}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} + E_{13}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} - D_3\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} + D_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} = k\tilde{\omega}_1, \\[2ex] E_{21}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + E_{22}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} + E_{23}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} - D_1\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} + D_3\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} = k\chi_1, \\[2ex] E_{31}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + E_{32}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} + E_{33}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} - D_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} + D_1\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} = k\rho_1, \end{cases}$$

k étant une fonction que nous laisserons indéterminée. Il est bien clair (voir form. (4) et (B_1)) que la troisième équation est une conséquence des deux premières. Bornons-nous à examiner une portion T de l'espace où, si k, $\tilde{\omega}_1$, χ_1, ρ_1, sont des fonctions monodromes finies et continues,

même les intégrales φ_1 et φ_2 des équations (10) jouissent de ces propriétés. On déduit des formules (10), par les formules (A_1), (4), (4″)

$$(10')\quad \begin{cases} E_{11}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} + E_{12}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} + E_{13}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} - D_2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} + D_3\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} = k\tilde{\omega}_2, \\ E_{21}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} + E_{22}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} + E_{23}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} - D_3\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} + D_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} = k\chi_2, \\ E_{31}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} + E_{32}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} + E_{33}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} - D_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} + D_2\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} = k\rho_2. \end{cases}$$

3. Si on remplace les variables x, y, z par $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ et que l'on suppose

$$k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = k(x, y, z)\frac{d(x, y, z)}{d(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})},$$

on trouve que les fonctions φ_1 et φ_2 sont liées aux quantités $\bar{\omega}_1, \bar{\chi}_1, \bar{\rho}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\chi}_2, \bar{\rho}_2$, par des équations analogues aux équations (10), (10′).

4. A quelles conditions doivent satisfaire φ_1 et φ_2? Posons

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{k}\left(E_{11}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + E_{12}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + E_{13}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + D_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - D_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{k}\left(E_{21}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + E_{22}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + E_{23}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + D_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - D_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)\right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{k}\left(E_{31}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + E_{32}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + E_{33}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + D_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - D_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Éliminant $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1$ entre les équations (10) on trouve

$$(G)\qquad \Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Réciproquement, si la condition (G) est vérifiée, les quantités $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1$ remplissent les conditions du 1[er] paragraphe de l'article précédent.

5. Supposons maintenant que les équations (10), (10′) soient vérifiées par les fonctions φ_1', φ_2' en remplaçant à droite $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ par $\tilde{\omega}_1', \chi_1', \rho_1', \tilde{\omega}_2', \chi_2', \rho_2'$. En employant les formules (E′) on trouve par un calcul très simple

$$(11)\qquad H = \frac{1}{k}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\tilde{\omega}_2' + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\chi_2' + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\rho_2'\right) + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\tilde{\omega}_1' + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\chi_1' + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\rho_1'\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_2'}{\partial x}\tilde{\omega}_2 + \frac{\partial\varphi_2'}{\partial y}\chi_2 + \frac{\partial\varphi_2'}{\partial z}\rho_2\right) + \left(\frac{\partial\varphi_1'}{\partial x}\tilde{\omega}_1 + \frac{\partial\varphi_1'}{\partial y}\chi_1 + \frac{\partial\varphi_1'}{\partial z}\rho_1\right)\right\}.$$

Evaluons $\int\limits_S kHdS$ en supposant que le champ S de l'intégration soit compris dans la région T. Nous aurons

$$\int\limits_S kHdS = \int\limits_S \left\{\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\tilde{\omega}_2' + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\chi_2' + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\rho_2'\right) + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\tilde{\omega}_1' + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\chi_1' + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\rho_1'\right)\right\} dS$$

$$= \int\limits_S \left\{\left(\frac{\partial\varphi_2'}{\partial x}\tilde{\omega}_2 + \frac{\partial\varphi_2'}{\partial y}\chi_2 + \frac{\partial\varphi_2'}{\partial z}\rho_2\right) + \left(\frac{\partial\varphi_1'}{\partial x}\tilde{\omega}_1 + \frac{\partial\varphi_1'}{\partial y}\chi_1 + \frac{\partial\varphi_1'}{\partial z}\rho_1\right)\right\} dS.$$

Appliquons aux dernières intégrales le procédé de l'intégration par parties. Supposant que S soit limité par la surface σ et que n soit la normale à σ dirigée au dehors de S, on aura

$$\int\limits_S kHdS = \int\limits_\sigma \left\{\varphi_2(\tilde{\omega}_2'\cos nx + \chi_2'\cos ny + \rho_2'\cos nz) + \varphi_1\frac{d\Phi_1'}{d\sigma}\right\} d\sigma$$

$$- \int\limits_S \varphi_2\left(\frac{\partial\tilde{\omega}_2'}{\partial x} + \frac{\partial\chi_2'}{\partial y} + \frac{\partial\rho_2'}{\partial z}\right) dS$$

$$= \int\limits_\sigma \left\{\varphi_2'(\tilde{\omega}_2\cos nx + \chi_2\cos ny + \rho_2\cos nz) + \varphi_1'\frac{d\Phi_1}{d\sigma}\right\} d\sigma$$

$$- \int\limits_S \varphi_2'\left(\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial\chi_2}{\partial y} + \frac{\partial\rho_2}{\partial z}\right) dS.$$

Cette formule peut s'écrire

$$\text{(I)}\qquad \int_S kH dS = \int_\sigma \left\{ \varphi_2 \left(\frac{E_{12}\rho_1' - E_{13}\chi_1'}{D_1} \cos nx + \frac{E_{23}\tilde{\omega}_1' - E_{21}\rho_1'}{D_2} \cos ny + \frac{E_{31}\chi_1' - E_{32}\tilde{\omega}_1'}{D_3} \cos nz \right) + \varphi_1 \frac{d\Phi_1'}{d\sigma} \right\} d\sigma$$

$$- \int_S \varphi_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{12}\rho_1' - E_{13}\chi_1'}{D_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\tilde{\omega}_1' - E_{21}\rho_1'}{D_2} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{31}\chi_1' - E_{32}\tilde{\omega}_1'}{D_3} \right) \right\} dS$$

$$= \int_\sigma \left\{ \varphi_2' \left(\frac{E_{12}\rho_1 - E_{13}\chi_1}{D_1} \cos nx + \frac{E_{23}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\rho_1}{D_2} \cos ny + \frac{E_{31}\chi_1 - E_{32}\tilde{\omega}_1}{D_3} \cos nz \right) + \varphi_1' \frac{d\Phi_1}{d\sigma} \right\} d\sigma$$

$$- \int_S \varphi_2' \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{12}\rho_1 - E_{13}\chi_1}{D_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\rho_1}{D_2} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{31}\chi_1 - E_{32}\tilde{\omega}_1}{D_3} \right) \right\} dS.$$

La formule qu'on vient de trouver est tout à fait analogue à la formule de Green.

Prenons $\Phi_1 = \Phi_1'$. On trouvera $H = \theta$ et

$$\text{(K)}\qquad \int_S k\theta dS = \int_\sigma \left\{ \varphi_2 (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz) + \varphi_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} \right\} d\sigma - \int_S \varphi_2 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} \right) dS.$$

6. Cherchons ce que deviennent les formules qu'on vient de trouver, lorsque les fonctions Φ_1 et Φ_1' remplissent la condition (C). On aura lorsque ce cas se présente

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{d\Phi_2}{d(y, z)}, \qquad \chi_2 = \frac{d\Phi_2}{d(z, x)}, \qquad \rho_2 = \frac{d\Phi_2}{d(x, y)};$$

$$\tilde{\omega}'_2 = \frac{d\Phi'_2}{d(y, z)}, \qquad \chi'_2 = \frac{d\Phi'_2}{d(z, x)}, \qquad \rho'_2 = \frac{d\Phi'_2}{d(x, y)};$$

$$(12) \qquad \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0, \qquad (12') \qquad \frac{\partial \tilde{\omega}'_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi'_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho'_2}{\partial z} = 0.$$

Par suite

$$(I') \qquad \int_S kH dS = \int_\sigma \left(\varphi_2 \frac{d\Phi'_2}{d\sigma} + \varphi_1 \frac{d\Phi'_1}{d\sigma}\right) d\sigma = \int_\sigma \left(\varphi'_2 \frac{d\Phi_2}{d\sigma} + \varphi'_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma}\right) d\sigma,$$

$$(K') \qquad \int_S k\theta dS = \int_\sigma \left(\varphi_2 \frac{d\Phi_2}{d\sigma} + \varphi_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma}\right) d\sigma.$$

Nous allons donner tout de suite une application de la dernière formule en démontrant le théorème suivant:

Supposons que $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ et F soient isogènes et que Φ soit sans singularités en S. Si on connaît les valeurs de $\Phi_1 + i\Phi_2$ pour les lignes de la surface σ, cette fonction est déterminée pour toutes les lignes du champ S.

En effet soient Φ' et Φ'' deux fonctions qui remplissent les conditions posées pour Φ. Posons

$$\Phi' - \Phi'' = \Phi''' = \Phi'''_1 + i\Phi'''_2.$$

On aura

$$\frac{d\Phi'''_1}{d\sigma} = 0, \qquad \frac{d\Phi'''_2}{d\sigma} = 0.$$

C'est pourquoi (form. (K'))

$$\int_S k\theta_{\Phi'''_1} dS = 0.$$

k est arbitraire, par suite, on peut supposer qu'il soit positif, θ est toujours positif.

Il faut donc qu'on ait

$$\theta_{\Phi_1'''} = 0,$$

d'où

$$\Phi_1''' = 0.$$

C. Q. F. D.

7. Supposons que Φ_1 vérifie l'égalité (C), on aura l'équation (12) et par suite en éliminant $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ entre les équations (10') on trouve que les fonctions φ_1, φ_2 doivent vérifier les équations différentielles

$$\text{(G)} \qquad \Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \qquad\qquad \text{(G')} \qquad \Gamma(\varphi_2, -\varphi_1) = 0.$$

Réciproquement si φ_1, φ_2 remplissent les conditions (G), (G') les quantités $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ obtenues par les équations (10), (10') satisfont aux équations

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0.$$

Cela posé nous allons démontrer que les équations (G), (G') dépendent d'un problème du calcul des variations.

On obtiendra aisément par ce qui précède l'expression de H et de θ par les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'$. Nous désignons ces expressions par $H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2')$, $\theta(\varphi_1, \varphi_2)$. Laissons les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'$ tout à fait arbitraires. On pourra écrire

$$\theta(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2) = \theta(\varphi_1, \varphi_2) + 2H(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) + \theta(\psi_1, \psi_2)$$

et par suite

$$\frac{1}{2}\int_S k\theta(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2)dS$$

$$= \frac{1}{2}\int_S k\theta(\varphi_1, \varphi_2)dS + \int_S kH(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)dS + \frac{1}{2}\int_S k\theta(\psi_1, \psi_2)dS.$$

Supposons maintenant $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ sur la surface σ qui forme la limite de S. Par le procédé de l'intégration par parties, on peut écrire

$$(13) \qquad \int_S kH(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)dS = -\int_S [\psi_1 \Gamma(\varphi_1, \varphi_2) + \psi_2 \Gamma(\varphi_2, -\varphi_1)]dS$$

d'où

$$(14) \qquad \frac{1}{2}\int_S k\theta(\varphi_1 + \psi_1, \varphi_2 + \psi_2)dS$$

$$= \frac{1}{2}\int_S k\theta(\varphi_1, \varphi_2)dS + \frac{1}{2}\int_S k\theta(\psi_1, \psi_2)dS - \int_S [\psi_1 \Gamma(\varphi_1, \varphi_2) + \psi_2 \Gamma(\varphi_2, -\varphi_1)]dS.$$

Soit k une quantité toujours affectée du même signe. Proposons-nous le problème:

Etant données les valeurs de φ_1 et φ_2 sur la surface σ, déterminer ces fonctions de sorte que l'intégrale

$$I = \frac{1}{2}\int_S k\theta(\varphi_1, \varphi_2)dS$$

soit maximum ou minimum.

Pour résoudre cette question, employons la formule (14). Il faudra prendre

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \qquad \Gamma(\varphi_2, -\varphi_1) = 0$$

et I sera maximum si k est négatif, minimum, si k est positif.

8. Si les fonctions φ_1 et φ_2 sont assujetties aux équations (G), (G') et qu'on en donne les valeurs sur σ, est-ce que les fonctions Φ_1, Φ_2 seront déterminées? Il est bien aisé de démontrer qu'elles seront déterminées pour toutes les lignes fermées qui peuvent se réduire à un point par déformation continue, sans sortir de la région S. Mais si le champ S n'est pas simplement connexe, il y a aussi des groupes de lignes fermées qui ne peuvent pas se réduire à un point sans sortir de la région S. Les valeurs des fonctions Φ_1 et Φ_2 pour les lignes de ces groupes renferment une constante arbitraire. Pour démontrer cette proposition il suffit de prouver que les conditions données suffisent pour déterminer $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$. En effet supposons que les conditions énoncées soient remplies par les fonctions φ_1' et φ_2', de même que par les fonctions φ_1'' et φ_2''. En posant $\varphi_1' - \varphi_1'' = \varphi_1'''$, $\varphi_2' - \varphi_2'' = \varphi_2'''$, on aura $\Gamma(\varphi_1''', \varphi_2''') = 0$, $\Gamma(\varphi_2''', -\varphi_1''') = 0$ et sur la surface σ, $\varphi_1''' = \varphi_2''' = 0$. En employant la formule (13) où l'on doit supposer

$$\varphi_1 = \psi_1 = \varphi_1''', \qquad \varphi_2 = \psi_2 = \varphi_2''',$$

on trouve donc

$$\int_S k\theta dS = 0$$

et par suite

$$\theta = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Article 4.

1. Examinons maintenant le cas qui se présente lorsque l'équation (9) est intégrable.[1] On pourra poser

$$D_1 dx + D_2 dy + D_3 dz = \lambda d\mu.$$

Il est aisé de démontrer que dans ce cas on peut satisfaire aux équations (10) en prenant $\varphi_1 = 0$, $k = \lambda$. En effet ces équations deviennent

$$(15) \qquad \frac{d(\mu, \varphi_2)}{d(y, z)} = \tilde{\omega}_1, \qquad \frac{d(\mu, \varphi_2)}{d(z, x)} = \chi_1, \qquad \frac{d(\mu, \varphi_2)}{d(x, y)} = \rho_1.$$

Mais on a

$$D_1\tilde{\omega}_1 + D_2\chi_1 + D_3\rho_1 = 0,$$

c'est à dire

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}\tilde{\omega}_1 + \frac{\partial\mu}{\partial y}\chi_1 + \frac{\partial\mu}{\partial z}\rho_1 = 0;$$

on peut donc (voir chapitre I, article 5) satisfaire aux équations (15). On voit aisément que μ et φ_2 ne changent pas en changeant les variables x, y, z. De même on peut prendre $\varphi_1' = 0$ et l'on peut écrire

$$(15') \qquad \frac{d(\mu, \varphi_2')}{d(y, z)} = \tilde{\omega}_1', \qquad \frac{d(\mu, \varphi_2')}{d(z, x)} = \chi_1', \qquad \frac{d(\mu, \varphi_2')}{d(x, y)} = \rho_1'.$$

---

[1] C'est dans ce cas seulement qu'on pourra rendre constants les coefficients $E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{33}, D_1, D_2, D_3$ par un changement des variables. (Voir § 1, article 3.)

2. Qu'est-ce que deviennent les équations (11), (I), (K) de l'article précédent? On trouve

$$(16)\qquad H = \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\tilde{\omega}_2' + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\chi_2' + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\rho_2'\right\} = \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\partial\varphi_2'}{\partial x}\tilde{\omega}_2 + \frac{\partial\varphi_2'}{\partial y}\chi_2 + \frac{\partial\varphi_2'}{\partial z}\rho_2\right\},$$

$$(\mathrm{L})\qquad \int_S \lambda H dS$$

$$= \int_\sigma \varphi_2(\tilde{\omega}_2'\cos nx + \chi_2'\cos ny + \rho_2'\cos nz)d\sigma - \int_S \varphi_2\left(\frac{\partial\tilde{\omega}_2'}{\partial x} + \frac{\partial\chi_2'}{\partial y} + \frac{\partial\rho_2'}{\partial z}\right)dS$$

$$= \int_\sigma \varphi_2'(\tilde{\omega}_2\cos nx + \chi_2\cos ny + \rho_2\cos nz)d\sigma - \int_S \varphi_2'\left(\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial\chi_2}{\partial y} + \frac{\partial\rho_2}{\partial z}\right)dS.$$

$$(\mathrm{M})\qquad \int_S \lambda\theta dS$$

$$= \int_\sigma \varphi_2(\tilde{\omega}_2\cos nx + \chi_2\cos ny + \rho_2\cos nz)d\sigma - \int_S \varphi_2\left(\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial\chi_2}{\partial y} + \frac{\partial\rho_2}{\partial z}\right)dS.$$

Si la condition (C) est réalisée, lorsque nous remplaçons Ψ par Φ_1 et Φ_1' on a

$$(\mathrm{L}')\qquad \int_S \lambda H_{\Phi_1\Phi_1'} dS = \int_\sigma \varphi_2 \frac{d\Phi_2'}{d\sigma} d\sigma = \int_\sigma \varphi_2' \frac{d\Phi_2}{d\sigma} d\sigma,$$

$$(\mathrm{M}')\qquad \int_S \lambda\theta_{\Phi_1} dS = \int_\sigma \varphi_2 \frac{d\Phi_2}{d\sigma} d\sigma.$$

3. Dans le cas qui se présente si Φ_1 remplit la condition (C), il y a aussi d'autres formules que nous allons trouver.

En effet si l'on a

$$\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial\chi_2}{\partial y} + \frac{\partial\rho_2}{\partial z} = 0$$

on peut satisfaire aux équations (10), (10′) en prenant $\varphi_2 = 0$, $k = \lambda$. On a

$$E_{11}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{12}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{13}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \lambda \tilde{\omega}_1, \qquad \frac{d(\varphi_1, \mu)}{d(y, z)} = \tilde{\omega}_2,$$

$$E_{21}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{22}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{23}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \lambda \chi_1, \qquad \frac{d(\varphi_1, \mu)}{d(z, x)} = \chi_2,$$

$$E_{31}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{32}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{33}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \lambda \rho_1, \qquad \frac{d(\varphi_1, \mu)}{d(x, y)} = \rho_2,$$

par suite

$$H_{\Phi_1 \Phi_1'} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\tilde{\omega}_1' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\chi_1' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\rho_1'\right),$$

$$\theta_{\Phi_1} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\tilde{\omega}_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\chi_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\rho_1\right).$$

d'où

(L″) $$\int_S \lambda H_{\Phi_1 \Phi_1'} dS = \int_\sigma \varphi_1 \frac{d\Phi_1'}{d\sigma} d\sigma,$$

(M″) $$\int_S \lambda \theta_{\Phi_1} dS = \int_\sigma \varphi_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} d\sigma.$$

Voilà une application de la dernière formule.

Si la fonction Ψ, sans singularités dans le champ T, remplit les conditions

$$D_1 \frac{d\Psi}{d(y, z)} + D_2 \frac{d\Psi}{d(z, x)} + D_3 \frac{d\Psi}{d(x, y)} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{E_{12}\dfrac{d\Psi}{d(x, y)} - E_{13}\dfrac{d\Psi}{d(z, x)}}{D_1}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{E_{23}\dfrac{d\Psi}{d(y, z)} - E_{21}\dfrac{d\Psi}{d(x, y)}}{D_2}\right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{E_{31}\dfrac{d\Psi}{d(z, x)} - E_{32}\dfrac{d\Psi}{d(y, z)}}{D_3}\right\} = 0,$$

et que l'on connaisse les valeurs de Ψ pour les lignes de σ, la fonction Ψ

est déterminée pour toute ligne du champ S (compris dans T) en supposant que λ soit toujours affecté du même signe en S.

En effet si Ψ'' et Ψ''_1 réalisent ces conditions, posons $\Psi''_1 - \Psi'' = \Phi_1$. On pourra appliquer la formule (M''). Mais sur la surface σ on a

$$\frac{d\Phi_1}{d\sigma} = 0;$$

par suite on aura

$$\int_S \lambda\theta dS = 0,$$

d'où

$$\theta = 0, \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \Psi'' = \Psi''_1.$$

C. Q. F. D.

On tire de là:

Si $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ et F ont une liaison d'isogénéité il suffit de connaître les valeurs de Φ_1 ou de Φ_2 sur la surface limite de S, pour que Φ soit déterminé en S.

4. On déduit aisément la formule

(N) $$\theta_{\Phi_1+\Phi_1'} = \theta_{\Phi_1} + 2H_{\Phi_1,\Phi_1'} + \theta_{\Phi_1'};$$

par suite on a

$$\frac{1}{2}\int_S \lambda\theta_{\Phi_1+\Phi_1'} dS = \frac{1}{2}\int_S \lambda\theta_{\Phi_1} dS + \int_S \lambda H_{\Phi_1,\Phi_1'} dS + \frac{1}{2}\int_S \lambda\theta_{\Phi_1'} dS$$

$$= \frac{1}{2}\int_S \lambda\theta_{\Phi_1} dS + \frac{1}{2}\int_S \lambda\theta_{\Phi_1'} dS + \int_\sigma \varphi_2'(\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz) d\sigma$$

$$- \int_S \varphi_2'\left(\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial\chi_2}{\partial y} + \frac{\partial\rho_2}{\partial z}\right) dS.$$

Si on prend sur la surface σ, $\varphi_2' = 0$, on a sur σ, $\Phi_1 + \Phi_1' = \Phi_1$, et la formule précédente devient

$$\frac{1}{2}\int_S \lambda\theta_{\Phi_1+\Phi_1'} dS = \frac{1}{2}\int_S \lambda\theta_{\Phi_1} dS + \frac{1}{2}\int_S \lambda\theta_{\Phi_1'} dS - \int_S \varphi_2'\left(\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial\chi_2}{\partial y} + \frac{\partial\rho_2}{\partial z}\right) dS.$$

On en déduit:

Pour que $\int_S \lambda \theta_{\Phi_1} dS$ *soit maximum ou minimum lorsque les valeurs de* Φ_1 *sont données pour les lignes de la surface* σ, *il faut que*

$$(17)\qquad \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{E_{12}\dfrac{d\Phi_1}{d(x\,,\,y)} - E_{13}\dfrac{d\Phi_1}{d(z\,,\,x)}}{D_1}\right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{E_{23}\dfrac{d\Phi_1}{d(y\,,\,z)} - E_{21}\dfrac{d\Phi_1}{d(x\,,\,y)}}{D_2}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{E_{31}\dfrac{d\Phi_1}{d(z\,,\,x)} - E_{32}\dfrac{d\Phi_1}{d(y\,,\,z)}}{D_3}\right\} = 0;$$

Φ_1 *étant une fonction qui réalise la condition* (6).

Réciproquement supposons vérifiée les conditions (6), (17), et que Φ_1 soit une fonction qui n'a pas de singularités dans le champ T.

En appliquant la formule (N) on aura

$$\frac{1}{2}\int_S \lambda \theta_{\Phi_1 + \Phi_1'} dS = \frac{1}{2}\int_S \lambda \theta_{\Phi_1} dS + \frac{1}{2}\int_S \lambda \theta_{\Phi_1'} dS - \int_\sigma \varphi_1 \frac{d\Phi_1'}{d\sigma} d\sigma.$$

Pour que l'on ait sur la surface σ

$$\Phi_1 + \Phi_1' = \Phi_1,$$

il faut et il suffit que

$$\frac{d\Phi_1'}{d\sigma} = 0.$$

On aura donc lorsque cette condition est réalisée

$$\frac{1}{2}\int_S \lambda \theta_{\Phi_1 + \Phi_1'} dS = \frac{1}{2}\int_S \lambda \theta_{\Phi_1} dS + \frac{1}{2}\int_S \lambda \theta_{\Phi_1'} dS.$$

On en déduit:

Il suffit que la condition (17) *soit remplie et que* Φ_1 *n'ait pas de singularités dans le champ* T, *pour que l'intégrale*

$$\int_S \lambda \theta_{\Phi_1} dS$$

soit un maximum ou un minimum entre toutes les intégrales $\int_S \lambda \theta_\Psi dS$, Ψ *étant une fonction qui vérifie la condition* (6) *et qui est égale à* Φ_1 *sur* σ. *On aura un maximum si* λ *est négatif et un minimum si* λ *est positif.*

5. Supposons que $\Phi_1 + i\Phi_1'$ et F aient une liaison d'isogénéité c'est à dire que

$$\tilde{\omega}_1' = \tilde{\omega}_2, \quad \chi_1' = \chi_2, \quad \rho_1' = \rho_2; \quad -\tilde{\omega}_2' = \tilde{\omega}_1, \quad -\chi_2' = \chi_1, \quad -\rho_2' = \rho_1.$$

D'après les équations (10′) de l'article précédent on aura

$$(18) \qquad \begin{cases} D_2 \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial z} - D_3 \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial y} = E_{11} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} + E_{12} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} + E_{13} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \\ D_3 \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial x} - D_1 \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial z} = E_{21} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} + E_{22} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} + E_{23} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \\ D_1 \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial y} - D_2 \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial x} = E_{31} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} + E_{32} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} + E_{33} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(18') \qquad \begin{cases} D_3 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} - D_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} = E_{11} \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial x} + E_{12} \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial y} + E_{13} \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial z}, \\ D_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} - D_3 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} = E_{21} \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial x} + E_{22} \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial y} + E_{23} \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial z}, \\ D_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} - D_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} = E_{31} \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial x} + E_{32} \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial y} + E_{33} \dfrac{\partial \varphi_2'}{\partial z}. \end{cases}$$

Les fonctions φ_2 et φ_2' doivent satisfaire à l'équation différentielle

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + E_{13}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + E_{23}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + E_{32}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + E_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right] = 0.$$

6. Soit $F = F_1 + iF_2$; les quantités

$$p_1 = \frac{dF_1}{d(y, z)}, \qquad q_1 = \frac{dF_1}{d(z, x)}, \qquad r_1 = \frac{dF_1}{d(x, y)},$$

$$p_2 = \frac{dF_2}{d(y, z)}, \qquad q_2 = \frac{dF_2}{d(z, x)}, \qquad r_2 = \frac{dF_2}{d(x, y)}$$

jouissent des propriétés suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial x} + \dfrac{\partial q_1}{\partial y} + \dfrac{\partial r_1}{\partial z} = 0, \\ D_1 p_1 + D_2 q_1 + D_3 r_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_2}{\partial x} + \dfrac{\partial q_2}{\partial y} + \dfrac{\partial r_2}{\partial z} = 0, \\ D_1 p_2 + D_2 q_2 + D_3 r_2 = 0. \end{cases}$$

On peut donc déterminer deux fonctions f_2, f_2', telles que

$$\frac{d(\mu, f_2)}{d(y, z)} = p_1, \quad \frac{d(\mu, f_2)}{d(z, x)} = q_1, \quad \frac{d(\mu, f_2)}{d(x, y)} = r_1,$$

$$\frac{d(\mu, f_2')}{d(y, z)} = p_2, \quad \frac{d(\mu, f_2')}{d(z, x)} = q_2, \quad \frac{d(\mu, f_2')}{d(x, y)} = r_2;$$

par suite

$$\lambda = -\frac{d(f_2, f_2', \mu)}{d(x, y, z)},$$

$$D_1 = -\frac{d(f_2, f_2', \mu)}{d(x, y, z)}\frac{\partial\mu}{\partial x}, \qquad D_2 = -\frac{d(f_2, f_2', \mu)}{d(x, y, z)}\frac{\partial\mu}{\partial y}, \qquad D_3 = -\frac{d(f_2, f_2', \mu)}{d(x, y, z)}\frac{\partial\mu}{\partial z}.$$

En changeant les variables x, y, z et en prenant $\bar{x} = f_2, \bar{y} = f_2', \bar{z} = \mu$, on trouve

$$\overline{E}_{11} = 1, \quad \overline{E}_{22} = 1, \quad \overline{E}_{33} = 0; \quad \overline{E}_{23} = 0, \quad \overline{E}_{31} = 0, \quad \overline{E}_{12} = 0;$$
$$\overline{D}_1 = 0, \quad \overline{D}_2 = 0, \quad \overline{D}_3 = -1.$$

Les équations (18), (18′) deviendront

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial f_2} = \frac{\partial\varphi_2'}{\partial f_2'}, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial f_2'} = -\frac{\partial\varphi_2'}{\partial f_2},$$

d'où

(20) $$\varphi_2 + i\varphi_2' = G(f_2 + if_2', \mu).$$

Employons la formule (E) du 1[er] chapitre.

On aura

$$F_1 |[L]| = \int_\sigma (p_1 \cos nx + q_1 \cos ny + r_1 \cos nz) d\sigma = -\int_L f_2 d\mu,$$

$$F_2 |[L]| = \int_\sigma (p_2 \cos nx + q_2 \cos ny + r_2 \cos nz) d\sigma = -\int_L f_2' d\mu;$$

$$\Phi_1 |[L]| = \int_\sigma (\tilde{\omega}_1 \cos nx + \chi_1 \cos ny + \rho_1 \cos nz) d\sigma = -\int_L \varphi_2 d\mu,$$

$$\Phi_2 |[L]| = \int_\sigma (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz) d\sigma = -\int_L \varphi_2' d\mu,$$

L étant le contour de σ. On en déduit

$$F|[L]| = -\int_L (f_2 + if_2') d\mu, \qquad \Phi|[L]| = -\int_L G d\mu.$$

Réciproquement si $F|[L]|$ et $\Phi|[L]|$ sont données par les formules (21), l'égalité (20) étant satisfaite, elles ont une liaison d'isogénéité.

7. Proposons-nous la question: *quelles conditions doivent être remplies pour qu'on puisse poser dans les équations* (10) *de l'article précédent* $\varphi_1 = 0$ *en prenant* φ_2 *arbitrairement?*

On peut démontrer aisément, par des considérations bien simples, que la condition de l'intégrabilité de l'équation (9) est nécessaire. En effet, soit

$$D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = k\tilde{\omega}_1, \qquad D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = k\chi_1, \qquad D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = k\rho_1$$

on aura

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{D_2}{k}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{D_3}{k}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{D_3}{k}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{D_1}{k}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{D_1}{k}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{D_2}{k}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right]$$

et par suite

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_3}{k} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{D_2}{k}\right] + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{D_1}{k} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{D_3}{k}\right] + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{D_2}{k} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{D_1}{k}\right] = 0$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_3}{k} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{D_2}{k} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\frac{D_1}{k} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{D_3}{k} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{D_2}{k} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{D_1}{k} = 0.$$

C. Q. F. D.

Article 5.

1. Nous allons maintenant examiner les opérations de dérivation et d'intégration sur les fonctions des lignes qui ont une liaison d'isogénéité. C'est par là qu'on va voir comment ces recherches se rattachent à celles de M. Poincaré. A cet effet il faut introduire des fonctions des points de l'espace liées aux fonctions des lignes. Remarquons que la définition des fonctions des variables imaginaires peut se donner de la façon suivante: soient φ et ψ deux variables imaginaires fonctions des points d'un plan; l'une sera fonction de l'autre, si

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial(-x)} = 0.$$

Généralisons cette définition pour l'espace. Soit F une fonction des lignes et f une fonction des points de l'espace. On dira que F et f ont une liaison d'isogénéité si

$$\frac{dF}{d(y,z)}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dF}{d(z,x)}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dF}{d(x,y)}\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{22}$$

On désignera toujours par des lettres majuscules les fonctions des lignes et par des lettres minuscules les fonctions des points.

2. Cela posé, il est bien aisé de démontrer les propositions suivantes:

1°) *Si entre f et F, et entre F et Φ il y a une liaison d'isogénéité, f et Φ ont aussi une liaison d'isogénéité.*

2°) *Si l'on a des fonctions f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ qui ont une liaison d'isogénéité avec F, il faut que*

$$\frac{d(f_i, f_r, f_s)}{d(x, y, z)} = 0. \qquad (i, r, s = 1, 2, \ldots, n) \tag{23}$$

Lorsque on aura des fonctions f_i qui remplissent les conditions (23) on dira qu'elles ont une liaison d'isogénéité entre elles.

3. Supposons que les fonctions Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ soient isogènes et que f ait une liaison d'isogénéité avec Φ_i, on aura

$$\frac{d\Phi_i}{d(y,z)}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d\Phi_i}{d(z,x)}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d\Phi_i}{d(x,y)}\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

On pourra donc (voir chap. I, art. 5) déterminer des fonctions φ_i, telles que

$$\frac{d\Phi_i}{d(y,z)} = \frac{d(f,\varphi_i)}{d(y,z)}, \qquad \frac{d\Phi_i}{d(z,x)} = \frac{d(f,\varphi_i)}{d(z,x)}, \qquad \frac{d\Phi_i}{d(x,y)} = \frac{d(f,\varphi_i)}{d(x,y)}. \tag{24}$$

et il y aura une liaison d'isogénéité entre φ_i et Φ_i.

Réciproquement soient φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ des fonctions ayant une liaison d'isogénéité. Posons

$$\frac{d(\varphi_i, \varphi_s)}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_{i,s}, \qquad \frac{d(\varphi_i, \varphi_s)}{d(z,x)} = \chi_{i,s}, \qquad \frac{d(\varphi_i, \varphi_s)}{d(x,y)} = \rho_{i,s},$$

on aura

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_{i,s}}{\partial x} + \frac{\partial \chi_{i,s}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{i,s}}{\partial z} = 0.$$

Par suite on pourra déterminer des fonctions $\Phi_{i,s}$ telles qu'elles satisfassent aux conditions

$$\frac{d\Phi_{i,s}}{d(y\,,z)} = \tilde{\omega}_{i,s}, \qquad \frac{d\Phi_{i,s}}{d(z\,,x)} = \chi_{i,s} \qquad \frac{d\Phi_{i,s}}{d(x\,,y)} = \rho_{i,s}.$$

Il est bien clair que les fonctions $\Phi_{i,s}$ ont entre elles et avec φ_i une liaison d'isogénéité.

4. Lorsque on a les égalités (24) on appellera la fonction Φ_i conjuguée à f et φ_i, et réciproquement les fonctions f et φ_i conjuguées à Φ_i.

Si L est une ligne dans un champ où f et φ_i sont des fonctions monodromes, on aura

$$\Phi_i|[L]| = \int_L \varphi_i df.$$

Supposons fixée la direction positive de la normale n à une surface σ; on aura

$$\frac{d\Phi_{i,s}}{d\sigma} = \tilde{\omega}_{i,s}\cos nx + \chi_{i,s}\cos ny + \rho_{i,s}\cos nz.$$

Prenons sur σ des coordonnées curvilignes, telles que les directions u, v, n soient disposées comme les directions x, y, z. Si le carré de l'élément linéaire est $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, on aura

$$(25) \qquad \frac{d\Phi_{i,s}}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_i}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi_i}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi_s}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi_s}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

5. Cela posé on peut examiner les opérations de dérivation et d'intégration. Supposons que Φ et F soient isogènes. Posons

$$\frac{dF}{d(y\,,z)} = p, \qquad \frac{dF}{d(z\,,x)} = q, \qquad \frac{dF}{d(x\,,y)} = r,$$

$$\frac{d\Phi}{d(y\,,z)} = \tilde{\omega}, \qquad \frac{d\Phi}{d(z\,,x)} = \chi, \qquad \frac{d\Phi}{d(x\,,y)} = \rho;$$

on aura

$$\frac{\left(\frac{d\Phi}{d\sigma}\right)}{\left(\frac{dF}{d\sigma}\right)} = \frac{\tilde{\omega}}{p} = \frac{\chi}{q} = \frac{\rho}{r},$$

σ étant une surface arbitraire. Nous désignerons le rapport qu'on vient de trouver et qui ne dépend pas de la direction $d\sigma$ par le symbole $\frac{d\Phi}{dF}$ et nous l'appellerons *la dérivée de Φ par rapport à F*. Cette dérivée est une fonction des points de l'espace. On peut démontrer que *la dérivée de Φ par rapport à F et les fonctions F et Φ ont une liaison d'isogénéité.*

En effet posons

$$\frac{d\Phi}{dF} = \varphi,$$

on aura

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x} - \varphi\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad q\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\chi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial q}{\partial y}, \qquad r\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial z} - \varphi\frac{\partial r}{\partial z};$$

par suite

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial x} + q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + r\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \left(\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\right) - \varphi\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right) = 0.$$

6. Supposons que f et F aient une liaison d'isogénéité. Soit σ une surface. Lorsque on a établi la direction de la normale n, le signe de $\frac{dF}{d\sigma}$ est déterminé. La quantité

$$\int_\sigma f\frac{dF}{d\sigma}d\sigma$$

est donc tout à fait définie. Nous la désignerons par le symbole

$$\int_\sigma f dF.$$

Si on change la direction positive de la normale, le signe dont est affectée l'intégrale change aussi. Si la surface n'est pas fermée nous conserverons entre la direction de la normale et les directions des contours la relation établie au 1er chapitre. Dans ce cas, par conséquent, la direction des contours donne le signe de l'intégrale.

Si, au contraire, σ est une surface fermée formant la limite d'un champ S dans lequel ni f ni F n'ont de singularités, nous aurons

$$\int_\sigma f dF = \int_\sigma f\left(\frac{dF}{d(y\,,z)}\cos nx + \frac{dF}{d(z\,,x)}\cos ny + \frac{dF}{d(x\,,y)}\cos nz\right)d\sigma$$

$$= \int_S \left\{ f\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{dF}{d(y\,,z)} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dF}{d(z\,,x)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dF}{d(x\,,y)}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dF}{d(y\,,z)} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dF}{d(z\,,x)} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dF}{d(x\,,y)}\right\} dS = 0.$$

On a donc le théorème exprimé par la formule

(26) $$\int_\sigma f dF = 0.$$

Si le champ S n'est pas limité par une seule surface, mais par les surfaces σ_i $(i = 1\,,\ldots,n)$, on aura

(26') $$\sum_1^n {}_i\int_{\sigma_i} f dF = 0.$$

Le théorème exprimé par les formules (26), (26') *est une généralisation du théorème de Cauchy.*

7. Supposons que les fonctions φ_i $(i = 1\,,2\,,\ldots,n)$ aient une liaison d'isogénéité. On pourra écrire

(27) $$I = \int_\sigma \varphi_r d\Phi_{i,s} = \int_\sigma \varphi_r \frac{d\Phi_{i,s}}{d\sigma} d\sigma = \int_\sigma \varphi_r \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\,, & \frac{\partial\varphi_s}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial v}\,, & \frac{\partial\varphi_s}{\partial v} \end{vmatrix} du dv,$$

$u\,,v$ étant des coordonnées curvilignes dont les directions par rapport à celle de la normale n sont disposées comme on a établi au § 4. En posant

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}du = d\varphi_i, \qquad \frac{\partial\varphi_s}{\partial u}du = d\varphi_s,$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}dv = \delta\varphi_i, \qquad \frac{\partial\varphi_s}{\partial v}dv = \delta\varphi_s,$$

on aura

$$I = \int_\sigma \varphi_r \begin{vmatrix} d\varphi_i\,, & d\varphi_s \\ \delta\varphi_i\,, & \delta\varphi_s \end{vmatrix}.$$

Si σ est une surface fermée qui renferme un champ S où il n'y a pas de singularités des fonctions φ_i, on aura

$$(28) \qquad \int_{\sigma} \varphi_r \begin{vmatrix} d\varphi_i, d\varphi_s \\ \partial\varphi_i, \partial\varphi_s \end{vmatrix} = 0.$$

Voilà une nouvelle expression du théorème de Cauchy généralisé.

8. Retranchons par des surfaces fermées les parties du champ où les fonctions f et F ont des singularités. Par des *sections linéaires* on restitue au champ la connection superficielle simple. Cela posé; il est clair que toute surface fermée sera la limite d'un champ où f et F n'ont pas de singularités. Soient L_0 et L_1 deux lignes fermées dont la direction est connue. Appelons $-L_0$ une ligne qui coïncide avec L_0 mais qui est prise dans la direction contraire de L_0. Supposons que, dans l'espace *sectionné*, on puisse mener une surface par $-L_0$ et L_1. (Voir chap. I, art. 2, § 3.)

Prenons la direction de la normale n à σ par rapport aux directions des lignes $-L_0$ et L_1 de la manière qu'on l'a établi (voir chap. I, art. 3, § 3). L'intégrale

$$(29) \qquad \int_{\sigma} f dF$$

sera déterminée. Il est aisé de démontrer que *la valeur de l'intégrale* (29) *ne dépend pas de la surface σ, mais dépend seulement des lignes L_0 et L_1.* En effet si l'on mène par $-L_0$ et L_1 une surface σ_1 qui ne coïncide pas avec σ, les surfaces σ et σ_1 formeront une ou plusieurs surfaces fermées. Par suite

$$\int_{\sigma+\sigma_1} f dF = 0,$$

d'où résulte la propriété énoncée. C'est pourquoi l'intégrale (29) peut être désignée par

$$(30) \qquad \int_{L_0}^{L_1} f dF.$$

En changeant la direction de la normale n on change aussi le signe de l'intégrale. Par suite

$$\int_{L_0}^{L_1} f dF = -\int_{L_1}^{L_0} f dF.$$

Supposons qu'on rend la courbe L_0 fixe, en laissant L_1 variable; l'intégrale (30) deviendra une fonction de la ligne L_1. On pourra donc écrire

$$\int_{L_0}^{L_1} f dF = \Phi|[L_1]|.$$

Φ et F ont une liaison d'isogénéité et on aura

$$\frac{d\Phi}{dF} = f.$$

Cela démontre que *la dérivation* et *de l'intégration*, telles qu'on vient de les définir, *sont deux opérations inverses.*

De même si les fonctions φ_i ont une liaison d'isogénéité, on aura

$$\int_{L_0}^{L_1} \varphi_i \begin{vmatrix} d\varphi_s , d\varphi_r \\ \delta\varphi_s , \delta\varphi_r \end{vmatrix} = \Psi|[L_1]|$$

et $\Psi|[L_1]|$ aura une liaison d'isogénéité avec les fonctions φ_i.

Soient f et φ deux fonctions conjuguées à la fonction F, on pourra écrire

$$F|[L_1]| - F|[L_0]| = \int_{L_0}^{L_1} \begin{vmatrix} df , d\varphi \\ \delta f , \delta\varphi \end{vmatrix}.$$

Nous avons achevé le mémoire en montrant dans le dernier article que, lorsqu'on a un système de fonctions de lignes qui ont une liaison d'isogénéité, on obtient par le procédé de la dérivation des fonctions de points f_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) qui sont liées par les relations

$$\frac{d(f_i , f_r , f_s)}{d(x , y , z)} = 0.$$

C'est pour cela que les variables f_i, f_r, f_s doivent êtres liées par des relations

$$(P) \qquad \varphi_{i,r,s}(f_i, f_r, f_s) = 0.$$

Réciproquement si on a des variables liées par des relations (P), il est bien aisé de voir qu'il y a entre elles une liaison d'isogénéité. Voilà le point par où ces recherches se rattachent à celles de M. Poincaré. Le théorème que nous avons énoncé au § 7, de l'article 5 est équivalent au théorème donné par M. Poincaré dans le mémoire sur les résidus des intégrales doubles.

On voit même aisément comment les fonctions des lignes peuvent se rattacher à une généralisation des intégrales abéliennes. Mais je crois qu'avant d'aborder une telle question il est utile, pour n'être pas obligé de traiter des cas particuliers, d'étendre aux hyperespaces les considérations que je viens d'exposer. Ce n'est pas là une généralisation où il n'y aurait qu'un pas à faire pour atteindre le but. On trouve au contraire quelques difficultés. En premier lieu, dans un espace à n dimensions on doit considérer des fonctions des espaces à $1, 2, \ldots, n-1$ dimensions. En second lieu, tandis que les systèmes d'équations (9) (chap. I, art. 5) peuvent toujours s'intégrer, les systèmes analogues qu'on trouve lorsqu'on étend la question aux hyperespaces n'ont pas toujours des intégrales communes. Pour traiter la question dans le cas général, il faut recourir à la théorie des intégrales communes aux systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles. Il faut que certaines conditions soient remplies, afin que les fonctions du 1er degré des hyperespaces puissent s'obtenir par l'intégration des fonctions des points, tandis que pour les fonctions des lignes dans l'espace les formules du § 8 sont toujours vérifiées. On voit donc que, dans le cas des hyperespaces, on doit trouver des catégories de fonctions qui ne se présentent pas dans le cas des espaces ordinaires.

SUR LES RÉSIDUS INTÉGRAUX
QUI DONNENT
DES VALEURS APPROCHÉES DES INTÉGRALES

PAR

P. TCHEBYCHEFF

À S:t PÉTERSBOURG.

(Traduit du russe[1] par I. Lyon.)

§ 1. Dans un mémoire *sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux,* communiqué à l'académie des sciences le 8 octobre 1885,[2] nous avons montré comment, d'après les valeurs données de $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)dx\,, \int_a^b xf(x)dx\,, \ \ldots\,, \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx, \quad (a \text{ et } b \text{ réels, et } a < b)$$

on peut trouver les limites les plus étroites de la valeur de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)dx$$

si la fonction inconnue $f(x)$ reste positive pour toutes les valeurs réelles

[1] Объ интегральныхъ вычетахъ, доставляющихъ приближенныя величины интеграловъ. Записки Импер. Академіи Наукъ. Томъ 55, книжка 1. Приложеніе, № 2. С.-Петербургъ. 1887.

[2] Traduction française, ce journal t. 9, p. 35.

Acta mathematica. 12. Imprimé le 3 avril 1889.

de x entre $x = a$ et $x = b$, et si la valeur de v est comprise entre a et b. Ces limites, comme nous avons vu, sont données par les formules suivantes:

$$(1) \quad \begin{cases} \int_a^v f(x)\,dx \leqq \sum_{a-\omega}^{v+\omega} F(z), \\ \int_a^v f(x)\,dx \geqq \sum_{a-\omega}^{v-\omega} F(z), \end{cases}$$

où ω est une quantité positive infiniment petite, et $F(z)$ une fonction rationnelle qui s'obtient facilement en développant l'expression

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{z} + \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{z^2} + \ldots + \frac{\int_a^b x^{2m-1} f(x)\,dx}{z^{2m}}$$

en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m - \ldots}}}$$

En effet, en posant

$$\frac{\varphi_{m-1}(z)}{\psi_{m-1}(z)} = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_{m-1} z + \beta_{m-1}}}},$$

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)} = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}},$$

elle est donnée par les formules

$$(2) \quad \begin{cases} F(z) = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ldots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m - \cfrac{1}{Z}}}} \\ Z = \gamma(z - v) + \dfrac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)} \end{cases}$$

où γ désigne la plus grande des deux quantités

$$\frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)}-\frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right],$$

$$\frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)}-\frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right].$$

En substituant à la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\ldots-\cfrac{1}{\alpha_m z+\beta_m-\cfrac{1}{Z}}}}$$

la fraction ordinaire qui lui est égale

$$\frac{\varphi_m(z)\,.\,Z-\varphi_{m-1}(z)}{\psi_m(z)\,.\,Z-\psi_{m-1}(z)}$$

et en posant

$$(3)\qquad \begin{cases} \Phi_0(z)=\varphi_m(z)\,.\,Z-\varphi_{m-1}(z),\\ \Phi_1(z)=\psi_m(z)\,.\,Z-\psi_{m-1}(z),\end{cases}$$

on aura

$$F(z)=\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}.$$

En portant cette valeur de la fonction $F(z)$ dans les formules (1), nous trouvons

$$\int_a^v f(x)dx \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v+\omega}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

$$\int_a^v f(x)dx \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v-\omega}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

ou bien

$$\int_a^v f(x)dx \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}+\mathop{\mathcal{E}}_{v}^{v+\omega}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

$$\int_a^v f(x)dx \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}-\mathop{\mathcal{E}}_{v-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}.$$

Or, les résidus intégraux

$$\mathop{\mathcal{E}}_{v-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} \quad \text{et} \quad \mathop{\mathcal{E}}_{v}^{v+\omega}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

où ω désigne une quantité infiniment petite, s'étendent seulement sur les valeurs voisines de $z = v$; et comme cette valeur de z, qui annule $\Phi_1(z)$ en vertu de (2) et (3), coïncide avec l'une de leurs limites, on aura

$$\mathop{\mathcal{E}}_{v-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} = \mathop{\mathcal{E}}_{v}^{v+\omega}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} = \frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)},$$

et les dernières formules nous donnent

$$(4) \qquad \begin{cases} \int_a^v f(x)dx \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} + \frac{\Phi_0(v)}{2\Phi_1'(v)}, \\ \int_a^v f(x)dx \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} - \frac{\Phi_0(v)}{2\Phi_1'(v)}. \end{cases}$$

On voit par là que la différence entre le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

et l'intégrale

$$\int_a^v f(x)dx$$

est au plus égale à la fraction

$$\frac{\Phi_0(v)}{2\Phi_1'(v)}.$$

C'est la plus grande approximation avec laquelle la valeur de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)dx$$

peut être déterminée d'après les valeurs données de $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)dx, \ \int_a^b xf(x)dx, \ \ldots, \ \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx,$$

si par rapport à la fonction inconnue $f(x)$ on sait seulement qu'elle reste positive pour les valeurs réelles de x entre $x = a$ et $x = b$.

Nous allons maintenant étudier la fraction

$$\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$$

et quelques formules qui peuvent nous conduire à la détermination de sa limite supérieure. Dans un cas particulier très remarquable nous trouvons par ces formules la limite supérieure de la fraction

$$\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$$

sous la forme d'une fonction du nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)dx\,,\ \int_a^b xf(x)dx\,,\ \int_a^b x^2f(x)dx\,,\ \ldots$$

et qui tend vers zéro quand ce nombre augmente indéfiniment.

§ 2. Nous profiterons ici de quelques résultats que nous avons obtenu dans notre mémoire *sur les fractions continues.* [1] Dans ce mémoire nous nous sommes occupé de la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 z + \beta_3 - \ldots}}}$$

qu'on obtient en développant la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{z - x_i} = \frac{\theta^2(x_0)}{z - x_0} + \frac{\theta^2(x_1)}{z - x_1} + \ldots + \frac{\theta^2(x_n)}{z - x_n},$$

où les quantités

$$x_0\,,\ x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\,,\ x_n$$

sont toutes réelles et distinctes, et les

$$\theta^2(x_0)\,,\ \theta^2(x_1)\,,\ \ldots\,,\ \theta^2(x_n)$$

[1] О непрерывныхъ дробяхъ. Записки Академiи Наукъ, т. 3, выпускъ 5. — Traduction française. Journal de Liouville, tome 10.

des quantités positives quelconques. En désignant par

$$\frac{\varphi_0(z)}{\psi_0(z)}, \frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}, \frac{\varphi_2(z)}{\psi_2(z)}, \ldots$$

les réduites de la fraction continue, nous trouvons, en vertu des formules démontrées dans ce mémoire, les égalités suivantes:

$$(5) \quad \frac{1}{\alpha_1} = \Sigma\theta^2(x_i)\psi_0^2(x_i), \quad \frac{1}{\alpha_2} = \Sigma\theta^2(x_i)\psi_1^2(x_i), \quad \frac{1}{\alpha_3} = \Sigma\theta^2(x_i)\psi_2^2(x_i), \quad \ldots$$

qui montrent que les coefficients

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

sont tous positifs. Il résulte de là que les premières termes des fonctions

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots$$
$$\psi_0(z), \psi_1(z), \psi_2(z), \ldots$$

ordonnées suivant les puissances décroissantes de z, auront des coefficients positifs.

D'autre part, comme nous avons vu dans ce même mémoire, pour toute fonction entière $f_0(z)$ d'un degré inférieur à μ on doit avoir l'équation

$$(6) \qquad \sum_{i=0}^{i=n} f_0(x_i)\psi_\mu(x_i)\theta^2(x_i) = 0.$$

De cette équation nous allons déduire quelques propriétés des fonctions

$$\psi_0(z), \psi_1(z), \psi_2(z), \ldots$$

dont nous nous servirons après. Pour cela nous remarquons que la dernière réduite

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\psi_{n+1}(z)}$$

doit donner la valeur exacte de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{z - x_i}$$

et son dénominateur $\psi_{n+1}(z)$ sera une fonction entière du degré $(n+1)$ de la forme

(7) $$\psi_{n+1}(z) = C(z-x_0)(z-x_1)\ldots(z-x_n),$$

où C désigne un coefficient constant. L'expression

$$\frac{\psi_{n+1}(z)}{(z-x_\lambda)(z-x_{\lambda+1})} \qquad [\lambda=0,1,2,\ldots,(n-1)]$$

sera donc une fonction entière du degré $(n-1)$, et d'après (6) on devra avoir l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=n}\frac{\psi_{n+1}(x_i)}{(x_i-x_\lambda)(x_i-x_{\lambda+1})}\psi_n(x_i)\theta^2(x_i)=0$$

qui se réduit en vertu de (7) à l'égalité

$$\frac{\psi'_{n+1}(x_\lambda)}{(x_\lambda-x_{\lambda+1})}\psi_n(x_\lambda)\theta^2(x_\lambda)+\frac{\psi'_{n+1}(x_{\lambda+1})}{(x_{\lambda+1}-x_\lambda)}\psi_n(x_{\lambda+1})\theta^2(x_{\lambda+1})=0,$$

d'où nous déduisons

$$\psi'_{n+1}(x_\lambda)\psi_n(x_\lambda)\theta^2(x_\lambda)=\psi'_{n+1}(x_{\lambda+1})\psi_n(x_{\lambda+1})\theta^2(x_{\lambda+1}).$$

Or, les racines

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \quad \text{de} \quad \psi_{n+1}(z)$$

sont toutes réelles et distinctes, et en les supposant disposées dans l'ordre de leurs grandeurs on voit que la dérivée

$$\psi'_{n+1}(z)$$

aura des signes contraires pour les deux racines consécutives x_λ et $x_{\lambda+1}$, et par conséquent la fonction

$$\psi_n(z)$$

aura aussi des signes opposés pour $z=x_\lambda$ et $z=x_{\lambda+1}$, c. à. d. entre deux racines consécutives quelconques de

$$\psi_{n+1}(z)$$

on aura au moins une racine de

$$\psi_n(z).$$

On voit par là que les n racines de

$$\psi_n(z)$$

seront toutes réelles, distinctes et situées respectivement dans les n intervalles des $(n+1)$ racines de

$$\psi_{n+1}(z).$$

En désignant par

$$x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}$$

les racines de

$$\psi_n(z)$$

disposées dans l'ordre de leurs grandeurs, on aura la série de grandeurs croissantes

$$x_0, x'_0, x_1, x'_1, \ldots, x'_{n-1}, x_n.$$

§ 3. Les n racines

$$x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n-1} \quad \text{de} \quad \psi_n(z)$$

étant inégales, la décomposition de la réduite

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)}$$

en fractions simples nous donnera la somme

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)} = \frac{\left(\frac{\varphi_n(x'_0)}{\psi'_n(x'_0)}\right)}{z - x'_0} + \frac{\left(\frac{\varphi_n(x'_1)}{\psi'_n(x'_1)}\right)}{z - x'_1} + \ldots + \frac{\left(\frac{\varphi_n(x'_{n-1})}{\psi'_n(x'_{n-1})}\right)}{z - x'_{n-1}} \tag{8}$$

où, comme il est facile de voir, les numérateurs

$$\frac{\varphi_n(x'_0)}{\psi'_n(x'_0)}, \frac{\varphi_n(x'_1)}{\psi'_n(x'_1)}, \ldots, \frac{\varphi_n(x'_{n-1})}{\psi'_n(x'_{n-1})}$$

sont tous positifs. En effet, les fonctions

$$\varphi_n(z), \varphi_{n+1}(z), \psi_n(z), \psi_{n+1}(z)$$

des réduites

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\psi_{n+1}(z)}$$

sont liées par la relation

$$\varphi_{n+1}(z)\psi_n(z) - \varphi_n(z)\psi_{n+1}(z) = 1.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par

$$\frac{\psi_n(z)\psi_{n+1}(z)}{z - x'_\mu} \qquad (\mu=0,1,\ldots,n-1)$$

et en y faisant

$$z = x'_\mu$$

nous trouvons l'égalité

$$\frac{\varphi_n(x'_\mu)}{\psi'_n(x'_\mu)} = -\frac{1}{\psi'_n(x'_\mu)\psi_{n+1}(x'_\mu)}. \qquad (\mu=0,1,2,\ldots,n-1)$$

Pour déterminer à l'aide de cette égalité le signe de la fraction

$$\frac{\varphi_n(x'_\mu)}{\psi'_n(x'_\mu)} \qquad (\mu=0,1,2,\ldots,n-1)$$

nous remarquons d'abord que le produit

$$\psi'_n(z)\psi_{n+1}(z)$$

sera positif pour $z=\infty$, puisque les premiers termes des fonctions $\psi(z)$, ordonnées par rapport aux puissances décroissantes de z, ont des coefficients positifs (§ 2).

Si maintenant on passe de $z=\infty$ à la plus grande racine $z=x'_{n-1}$ de $\psi_n(z)$, la fonction $\psi_{n+1}(z)$ changera son signe en passant par sa racine $z=x_n$, tandis que la dérivée $\psi'_n(z)$ n'ayant pas de racine entre $z=x'_{n-1}$ et $z=\infty$ conservera son signe. Le produit

$$\psi'_n(z)\psi_{n+1}(z)$$

sera donc négatif pour $z=x'_{n-1}$, et il est facile de voir qu'il conservera sa valeur négative pour toutes les racines

$$z = x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1} \quad \text{de} \quad \psi_n(z),$$

car, d'après le § 2, entre deux racines consécutives de $\psi_n(z)$ on trouvera toujours une racine pour chacune des fonctions $\psi'_n(z)$ et $\psi_{n+1}(z)$, en vertu

de quoi leur produit doit avoir le même signe pour toutes les racines de $\psi_n(z)$. Ainsi, le produit

$$\psi'_n(z)\psi_{n+1}(z)$$

sera négatif pour les valeurs de

$$z = x'_0\,,\, x'_1\,,\, x'_2\,,\, \ldots\,,\, x'_{n-1}$$

et la fraction

$$\frac{\varphi_n(x'_\mu)}{\psi'_n(x'_\mu)}$$

sera positive pour $\mu = 0\,,\, 1\,,\, 2\,,\, \ldots\,,\, n - 1$.

Posons

$$\frac{\varphi_n(x'_\mu)}{\psi'_n(x'_\mu)} = \theta_1^2(x'_\mu)$$

et la somme (8) prendra la forme

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)} = \frac{\theta_1^2(x'_0)}{z - x'_0} + \frac{\theta_1^2(x'_1)}{z - x'_1} + \ldots + \frac{\theta_1^2(x'_{n-1})}{z - x'_{n-1}}.$$

Ainsi, connaissant la décomposition de la réduite

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\psi_{n+1}(z)}$$

en une somme de fractions simples de la forme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{z - x_i},$$

où les x_i sont toutes des quantités réelles et distinctes, et les $\theta^2(x_i)$ des quantites positives quelconques, on pourra aussi décomposer la réduite

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)}$$

en une somme de la même forme

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} \frac{\theta_1^2(x'_\mu)}{z - x'_\mu},$$

dans laquelle les quantités x'_μ sont aussi toutes réelles et distinctes, et les $\theta_1^2(x'_\mu)$ des quantités positives. De plus, les quantités x_ι et x'_μ dans l'ordre de leurs grandeurs formeront, comme on a vu, la série suivante:

$$x_0\,,\; x'_0\,,\; x_1\,,\; x'_1\,,\; \ldots\,,\; x_\lambda\,,\; x'_\lambda\,,\; \ldots\,,\; x'_{n-1}\,,\; x_n\,.$$

En passant de même de la décomposition de la réduite

$$\frac{\varphi_n(z)}{\psi_n(z)}$$

à la décomposition de la réduite

$$\frac{\varphi_{n-1}(z)}{\psi_{n-1}(z)}$$

et ainsi de suite, nous trouvons pour chacune d'elles une décomposition de la forme

$$\frac{\varphi_l(z)}{\psi_l(z)} = \frac{\theta_l^2(z_0)}{z - z_0} + \frac{\theta_l^2(z_1)}{z - z_1} + \ldots + \frac{\theta_l^2(z_{l-1})}{z - z_{l-1}}$$

où les racines $z_0\,, z_1\,, \ldots\,, z_{l-1}$ de $\psi_l(z)$ sont toutes réelles et distinctes, et les $\theta_l^2(z)$ des quantités positives. De plus, en désignant par

$$z'_0\,,\; z'_1\,,\; z'_2\,,\; \ldots\,,\; z'_{l-2}$$

les racines de $\psi_{l-1}(z)$ et en les disposant avec celles de $\psi_l(z)$ par l'ordre de leurs grandeurs croissantes, nous trouvons la série

$$z_0\,,\; z'_0\,,\; z_1\,,\; z'_1\,,\; \ldots\,,\; z_\lambda\,,\; z'_\lambda\,,\; z_{\lambda+1}\,,\; \ldots\,,\; z'_{l-2}\,,\; z_{l-1}\,,$$

dont les termes sont tous compris entre x_0 et x_n.

§ 4. Revenons à la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}}\,,$$

que l'on obtient en développant l'expression

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{z} + \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{z^2} + \ldots + \frac{\int_a^b x^{2m-1} f(x)\,dx}{z^{2m}}$$

en fraction continue et en s'arrêtant à la $m^{\text{ième}}$ réduite. Cette expression ne diffère de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx$$

que par les termes

$$\frac{\int_a^b x^{2m} f(x)\,dx}{z^{2m+1}} + \frac{\int_a^b x^{2m+1} f(x)\,dx}{z^{2m+2}} + \cdots$$

et comme ces termes n'ont aucune influence sur les m premiers dénominateurs de la fraction continue, nous pouvons, en nous bornant aux m premiers termes, la regarder comme provenant du développement de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx.$$

Or, cette intégrale, où, par hypothèse, la fonction $f(x)$ reste positive pour les valeurs de x entre a et b, peut être regardée comme la limite de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{z-x_i},$$

dans laquelle les quantités x_i désignent une série de grandeurs croissantes de $x_0 = a$ à $x_n = b$, et les $\theta^2(x_i)$ des quantités positives choisies conformément aux valeurs correspondantes de $f(x)$; et nous en concluons, d'après le § 2, que les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de la fraction continue en question auront des valeurs positives, définies par les formules

$$(9)\quad \alpha_1 = \frac{1}{\int_a^b \psi_0^2(x) f(x)\,dx}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\int_a^b \psi_1^2(x) f(x)\,dx}, \quad \ldots, \quad \alpha_m = \frac{1}{\int_a^b \psi_{m-1}^2(x) f(x)\,dx},$$

et que les dénominateurs $\psi_m(z)$ et $\psi_{m-1}(z)$ des réduites

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}, \quad \frac{\varphi_{m-1}(z)}{\psi_{m-1}(z)}$$

auront toutes leurs racines réelles, distinctes et comprises entre a et b. De plus, en désignant par

$$z_0\,,\, z_1\,,\, z_2\,,\, \ldots\,,\, z_{m-1}$$

$$z'_0\,,\, z'_1\,,\, z'_2\,,\, \ldots\,,\, z'_{m-2}\,,$$

les racines des fonctions $\psi_m(z)$ et $\psi_{m-1}(z)$, dans l'ordre de leurs grandeurs, on devra avoir la série suivante de grandeurs croissantes:

$$z_0\,,\, z'_0\,,\, z_1\,,\, z'_1\,,\, \ldots\,,\, z_\lambda\,,\, z'_\lambda\,,\, z_{\lambda+1}\,,\, \ldots\,,\, z'_{m-2}\,,\, z_{m-1}\,.$$

Tout ceci doit avoir lieu, bien entendu, si les intégrales

$$\int_a^b f(x)dx\,,\ \int_a^b xf(x)dx\,,\ \ldots\,,\ \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx$$

peuvent prendre des valeurs données pour $f(x)$ positive entre a et b.

§ 5. Nous venons de voir que, si les valeurs données des intégrales

$$\int_a^b f(x)dx\,,\ \int_a^b xf(x)dx\,,\ \ldots\,,\ \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx$$

sont possibles pour $f(x)$ positive entre a et b, la fonction $\psi_m(z)$ déterminée par ces valeurs ne peut pas avoir des racines hors des limites a et b. Deux cas peuvent donc se présenter: 1) aucune des racines de $\psi_m(z)$ n'atteint ni la limite a, ni la limite b, et 2) l'une des limites a et b ou toutes les deux annulent la fonction $\psi_m(z)$. Nous allons d'abord examiner le second cas qui d'ailleurs se présente très rarement.

En regardant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}dx$$

comme la limite de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n}\frac{\theta^2(x_i)}{z-x_i},$$

où l'on a $x_0 = a\,,\, x_n = b$, et en remarquant que, d'après le § 2, le dénominateur de la dernière réduite

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\psi_{n+1}(z)},$$

égale à cette somme, est le seul qui peut s'annuler pour $z = x_0 = a$ et $z = x_n = b$, nous en concluons que, dans le cas considéré, la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{z - x_i}.$$

et par conséquent l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{z - x},$$

doivent être égales à la réduite

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

Or, cette fraction se décompose en une somme de fractions simples de la forme

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} \frac{\varphi_m(z_\mu)}{\psi'_m(z_\mu)} \frac{1}{z - z_\mu},$$

et pour que cette somme puisse être égale à l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z - x} dx,$$

il faut que la fonction $f(x)$ s'annule pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, qui ne sont pas dans le voisinage de

$$x = z_\mu, \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

et que pour les valeurs de x infiniment voisines de

$$x = z_0, z_1, \ldots, z_{m-1},$$

elle ait des valeurs telles que les intégrales

$$\int_{z_0}^{z_0+\omega} f(x)dx, \int_{z_1-\omega}^{z_1+\omega} f(x)dx, \ldots, \int_{z_{m-1}-\omega}^{z_{m-1}} f(x)dx$$

se ramènent, lorsque ω devient nulle, aux valeurs

$$\frac{\varphi_m(z_0)}{\psi'_m(z_0)}, \frac{\varphi_m(z_1)}{\psi'_m(z_1)}, \ldots, \frac{\varphi_m(z_{m-1})}{\psi'_m(z_{m-1})}.$$

Avec une telle fonction $f(x)$ l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

se ramène au résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

pour toutes les valeurs de v entre les limites a et b, différentes de $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$. Quant aux valeurs de $v = z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$, on voit que pour ces valeurs de v l'intégrale reçoit des accroissements brusques, égaux respectivement à

$$\frac{\varphi_m(z_0)}{\psi'_m(z_0)}, \frac{\varphi_m(z_1)}{\psi'_m(z_1)}, \ldots, \frac{\varphi_m(z_{m-1})}{\psi'_m(z_{m-1})},$$

et par conséquent pour $v = z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$ sa valeur ne peut pas être complètement déterminée.

§ 6. Passons au cas général lorsque ni a, ni b ne satisfont pas à l'équation

$$\psi_m(z) = 0.$$

Nous allons d'abord montrer que la quantité γ qui figure dans nos formules est une quantité positive. En effet, d'après le § 1 on doit avoir les inégalités

$$\gamma \geqq \frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right],$$

$$\gamma \geqq \frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right].$$

En les multipliant respectivement par les quantités positives $v-a$, $b-v$ et en les ajoutant ensuite membre à membre, nous trouvons l'inégalité

$$\gamma(b-a) \geqq \frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)}.$$

Or, les termes les plus élevés dans les fonctions $\psi_{m-1}(z)$, $\psi_m(z)$ ayant des coefficients positifs, on devra avoir

$$\frac{\psi_{m-1}(\infty)}{\psi_m(\infty)} > 0, \qquad \frac{\psi_{m-1}(-\infty)}{\psi_m(-\infty)} < 0,$$

et comme toutes les racines des fonctions $\psi_{m-1}(z)$, $\psi_m(z)$ sont plus grandes que a et plus petites que b, on aura aussi

$$\frac{\psi'_{m-1}(b)}{\psi'_m(b)} > 0, \qquad \frac{\psi'_{m-1}(a)}{\psi'_m(a)} < 0,$$

en vertu de quoi l'inégalité précédente nous donne

$$\gamma(b-a) > 0; \quad \text{d'où} \quad \gamma > 0.$$

La quantité γ, comme on a vu dans le § 1, sert à déterminer la fonction $\Phi_1(z)$ qui, en vertu de (2) et (3), sera donnée par la formule

$$\Phi_1(z) = \left[\gamma(z-v) + \frac{\psi'_{m-1}(v)}{\psi'_m(v)}\right]\psi_m(z) - \psi_{m-1}(z),$$

dans laquelle, comme on vient de le voir, la quantité γ est positive; et comme de plus les termes les plus élevés dans les fonctions $\psi_m(z)$, $\psi_{m-1}(z)$ ont des coefficients positifs, cette formule nous donnera

$$\Phi_1(\infty) = +, \qquad \Phi_1(-\infty) = \mp,$$

où le signe supérieur correspond au cas de m pair et le signe inférieur au cas de m impair. Si maintenant on fait dans cette formule $z = z_0$, $z_1, \ldots, z_{m-1}$, on aura, d'après le § 4,

$$\Phi_1(z_i) = -\psi_{m-1}(z_i), \qquad (i=0,1,2,\ldots,m-1)$$

$$\psi_{m-1}(z_{m-1}) = +, \qquad \psi_{m-1}(z_{m-2}) = -, \quad \ldots, \quad \psi_{m-1}(z_0) = \mp,$$

de sorte que pour la fonction $\Phi_1(z)$ nous trouvons

$$\Phi_1(\infty) = +, \quad \Phi_1(z_{m-1}) = -, \quad \ldots, \quad \Phi_1(z_0) = \pm, \qquad \Phi_1(-\infty) = \mp.$$

On voit par là que les $m+1$ racines de la fonction

$$\Phi_1(z)$$

sont toutes réelles, distinctes et séparées par les m racines de la fonction

$$\psi_m(z).$$

§ 7. En désignant par

$$\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$$

les racines de la fonction

$$\Phi_1(z),$$

nous trouvons pour la fraction

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

la décomposition suivante en fractions simples:

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} \frac{1}{z - \zeta_i},$$

où, comme il est facile de voir, les facteurs

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} \qquad (i=0, 1, \ldots, m)$$

sont tous positifs. En effet, des formules (3) on déduit facilement l'égalité

$$\Phi_0(z)\psi_m(z) - \Phi_1(z)\varphi_m(z) = \varphi_m(z)\psi_{m-1}(z) - \varphi_{m-1}(z)\psi_m(z).$$

Comme le second membre, d'après une propriété bien connue des réduites, est égal à l'unité, nous aurons l'égalité

$$\Phi_0(z)\psi_m(z) - \Phi_1(z)\varphi_m(z) = 1.$$

En divisant les deux membres de cette égalité par

$$\frac{\Phi_1(z)\psi_m(z)}{z - \zeta_i} \qquad (i=0, 1, \ldots, m)$$

et en y faisant

$$z = \zeta_i,$$

nous trouvons l'égalité

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} = \frac{1}{\psi_m(\zeta_i)\Phi_1'(\zeta_i)}. \qquad (i=0, 1, \ldots, m)$$

Pour déterminer à l'aide de cette égalité le signe de la fraction

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)}, \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, m)$$

nous remarquons d'abord que le produit

$$\psi_m(z)\Phi_1'(z)$$

sera positif pour $z = \infty$, puisque les termes les plus élevés dans les fonctions $\psi_m(z)$ et $\Phi_1'(z)$ ont des coefficients positifs; et comme les racines de $\psi_m(z)$ et $\Phi_1'(z)$ sont toutes plus petites que la plus grande racine ζ_m de $\Phi_1(z)$ (§ 6), on voit que ce produit sera aussi positif pour $z = \zeta_m$. Il est facile de voir que ce signe $+$ le produit le conservera pour toutes les racines

$$z = \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m \text{ de } \Phi_1(z),$$

car, entre deux racines consécutives quelconques de $\Phi_1(z)$ chacune des fonctions $\psi_m(z)$ et $\Phi_1'(z)$ aura toujours une racine seulement (§ 6), en vertu de quoi leur produit aura le même signe pour toutes les racines de $\Phi_1(z)$. On aura donc bien

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} > 0$$

pour les valeurs de $i = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Ainsi, la fraction

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)},$$

qui, comme on a vu dans le § 1, est égale à la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m - \cfrac{1}{Z}}}},$$

se ramène à la somme

$$\sum_{i=0}^{i=m} \frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} \frac{1}{z - \zeta_i},$$

dans laquelle les quantités ζ_i sont toutes réelles et distinctes, et les $\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)}$ des quantités positives. Comme cette somme ne diffère que par les notations de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{\theta^2(x_i)}{z - x_i},$$

que nous avons étudiée dans le mémoire précité *sur les fractions continues,*

on trouve, d'après la formule donnée à la fin du § 5 de ce mémoire, l'égalité suivante:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m} \frac{\psi_\mu^2(\zeta_i)\dfrac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)}}{\sum\limits_{i=0}^{i=m}\psi_\mu^2(\zeta_i)\dfrac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)}} = 1.$$

D'après les formules (5) nous trouvons

$$\sum_{i=0}^{i=m}\psi_\mu^2(\zeta_i)\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} = \frac{1}{\alpha_{\mu+1}};$$

en vertu de quoi l'égalité précédente peut s'écrire

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m}\alpha_{\mu+1}\psi_\mu^2(\zeta_i)\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} = 1, \qquad (i=0,1,\ldots,m)$$

d'où l'on tire la formule

$$\frac{\Phi_0(\zeta_i)}{\Phi_1'(\zeta_i)} = \frac{1}{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=m}\alpha_{\mu+1}\psi_\mu^2(\zeta_i)}, \qquad (i=0,1,2,\ldots,m)$$

dans laquelle le dernier coefficient α_{m+1} sera égal à γ, coefficient de z dans le dernier dénominateur Z. Ainsi pour toutes les racines $z=\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ de $\Phi_1(z)$ on aura

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1'(z)} = \frac{1}{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=m}\alpha_{\mu+1}\psi_\mu^2(z)},$$

et comme, en vertu de (2) et (3), $z=v$ annule la fonction $\Phi_1(z)$, on obtient la formule

$$\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)} = \frac{1}{\sum\limits_{\mu=0}^{\mu=m}\alpha_{\mu+1}\psi_\mu^2(v)} = \frac{1}{\alpha_1\psi_0^2(v)+\alpha_2\psi_1^2(v)+\ldots+\alpha_m\psi_{m-1}^2(v)+\gamma\psi_m^2(v)}.$$

§ 8. Dans le § 1 nous avons montré que les limites de la différence entre l'intégrale

$$\int_a^v f(x)dx$$

et le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

sont données par

$$-\frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)},$$

et l'on voit d'après la valeur trouvée de la fraction

$$\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$$

que le degré d'approximation avec laquelle le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

donne la valeur de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

sera déterminé par la fraction

$$(10) \qquad \frac{1}{2}\,\frac{1}{a_1\psi_0^2(v) + a_2\psi_1^2(v) + \ldots + a_m\psi_{m-1}^2(v) + \gamma\psi_m^2(v)},$$

dans laquelle la quantité γ seule dépend des limites a, b des intégrales considérées. Cette fraction augmente lorsque γ diminue, et elle diminue lorsque γ augmente. Comme la valeur de γ qui est toujours positive sera nulle pour $a = -\infty$, $b = \infty$, et deviendra infiniment grande pour $\psi_m(a) = 0$ ou $\psi_m(b) = 0$ (§§ 1 et 6), on voit que la différence entre l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

et le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

tendra vers zéro si a ou b s'approche indéfiniment de la valeur d'une racine de $\psi_m(z)$ et si v n'est pas racine de cette fonction, ce qui est

bien conforme aux résultats auxquels nous sommes arrivés dans le § 5. La limite (10) de cette différence atteindra au contraire sa plus grande valeur pour $a = -\infty$, $b = \infty$ et se réduira pour ces valeurs des limites a, b à la fraction

$$(11) \qquad \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha_1\psi_0^2(v) + \alpha_2\psi_1^2(v) + \ldots + \alpha_m\psi_{m-1}^2(v)}.$$

Il est facile de voir que la valeur de cette fraction diminue lorsque le nombre m augmente, et qu'elle deviendra nulle pour $m = \infty$, si la série

$$\alpha_1\psi_0^2(v) + \alpha_2\psi_1^2(v) + \alpha_3\psi_2^2(v) + \ldots$$

est divergente. Cette fraction dépend évidemment de v aussi, et par conséquent, selon la valeur de v, le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

donnera la valeur de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

avec une approximation plus ou moins grande. Il est cependant facile de montrer que pour certaines valeurs de v la valeur de la fraction (11), et par conséquent aussi la valeur de la fraction (10) dont elle est la limite supérieure, sera plus petite que

$$\frac{1}{2m}\int_a^b f(x)\,dx.$$

En effet, en désignant par D la plus grande valeur du dénominateur de la fraction (11) pour $a < v < b$, nous trouvons l'inégalité

$$\int_a^b [\alpha_1\psi_0^2(v) + \alpha_2\psi_1^2(v) + \ldots + \alpha_m\psi_{m-1}^2(v)]f(v)\,dv < D\int_a^b f(x)\,dx,$$

et comme d'après les formules (9) le premier membre de cette inégalité se réduit à m, on aura l'inégalité

$$m < D\int_a^b f(x)\,dx$$

ou bien

$$\frac{1}{2D} < \frac{1}{2m}\int_a^b f(x)\,dx.$$

On voit par là que $\frac{1}{2D}$ qui, conformément à notre notation, représente la plus petite valeur de la fraction (11) pour les valeurs de v comprises entre a et b, sera plus petite que

$$\frac{1}{2m}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Donc, quelles que soient les limites a et b, la différence entre l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

et le résidu intégral

$$\mathcal{E}_{a-\omega}^{v}\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

ne peut pas surpasser la valeur de la fraction (11)

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{a_1\psi_0^2(v) + a_2\psi_1^2(v) + \ldots + a_m\psi_{m-1}^2(v)}$$

ou bien de la fraction

(12) $$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\dfrac{\psi_0^2(v)}{\int_a^b \psi_0^2(x)f(x)\,dx} + \dfrac{\psi_1^2(v)}{\int_b^b \psi_1^2(x)f(x)\,dx} + \dfrac{\psi_{m-1}^2(v)}{\int_a^b \psi_{m-1}^2(x)f(x)\,dx}},$$

qu'on obtient en remplaçant dans (11) les coefficients α par leurs valeurs tirées de (9).

Les fonctions

$$\psi_0(z)\,,\ \psi_1(z)\,,\ \ldots\,,\ \psi_{m-1}(z)$$

sont déterminées, comme on a vu, à l'aide du développement de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx$$

en fraction continue de la forme

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 z + \beta_3 - \ldots}}}$$

Et comme la valeur de la fraction (12) ne change pas lorsqu'on multiplie les fonctions ψ par des facteurs constants quelconques, nous pouvons y prendre pour les fonctions

$$\psi_0(z),\ \psi_1(z),\ \ldots,\ \psi_{m-1}(z)$$

les fonctions que l'on obtient en développant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx$$

en fraction continue de la forme

$$\cfrac{\rho_1}{\alpha' z + \beta' - \cfrac{\rho_2}{\alpha'' z + \beta'' - \cfrac{\rho_3}{\alpha''' z + \beta''' - \ldots}}}$$

les ρ étant des quantités constantes quelconques; car, le changement des quantités $\rho_1, \rho_2, \ldots$ équivaut, comme il est facile de le voir, à l'introduction de facteurs constants dans ces fonctions.

Nous venons de montrer comment on détermine les limites de la différence entre l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx$$

et le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}$$

dans le cas où l'on donne les $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)\,dx,\ \int_a^b x f(x)\,dx,\ \ldots,\ \int_a^b x^{2m-1} f(x)\,dx$$

et si l'on sait que la fonction inconnue $f(x)$ reste positive pour les valeurs de x entre a et b. Il est facile d'en déduire les limites de la différence entre les intégrales

$$\int_a^v f(x)\,dx\,,\ \int_a^v f_1(x)\,dx,$$

si l'on a les égalités

$$\int_a^b x^i f_1(x)\,dx = \int_a^b x^i f(x)\,dx \qquad (i=0,1,2,\ldots,2m-1) \tag{13}$$

et si la fonction $f_1(x)$ reste aussi positive pour les valeurs de x entre $x=a$, $x=b$. En effet, dans ce cas on aura les mêmes résidus intégraux et les mêmes limites des différences entre les intégrales et les résidus intégraux, et par conséquent la différence entre les intégrales

$$\int_a^v f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^v f_1(x)\,dx$$

ne pourra pas surpasser le double de la limite de la différence entre chacune de ces intégrales et le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\infty}^{v} \frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}.$$

Donc, si les égalités (13) ont lieu pour deux fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$ qui restent positives pour les valeurs de x entre a et b, la différence entre les intégrales

$$\int_a^v f(x)\,dx\,,\ \int_a^v f_1(x)\,dx$$

ne pourra pas surpasser la valeur de la fraction

$$\frac{1}{\dfrac{\psi_0^2(v)}{\int_a^b \psi_0^2(x) f(x)\,dx} + \dfrac{\psi_1^2(v)}{\int_a^b \psi_1^2(x) f(x)\,dx} + \cdots + \dfrac{\psi_{m-1}^2(v)}{\int_a^b \psi_{m-1}^2(x) f(x)\,dx}}, \tag{14}$$

quelles que soient les limites a et b.

§ 9. Comme exemple de l'application de nos formules nous allons maintenant considérer le cas où l'on a

$$a = -\infty, \qquad b = \infty, \qquad f(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}x^2}.$$

Dans ce cas, comme on va le voir, la limite supérieure de la fraction (14) pourra être déterminée quelle que soit la valeur de v, et il en résulte un théorème qui peut avoir des applications utiles dans la Théorie des Probabilités.

D'après les formules données dans notre mémoire *Sur le développement des fonctions à une seule variable,*[1] dans lequel nous avons étudié le développement de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{k}{\pi}}\, e^{-ku^2}}{x-u}\, du$$

en fraction continue et les réduites

$$\frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)}, \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}, \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}, \ldots,$$

nous trouvons que, dans le cas que nous considérons maintenant, les fonctions

$$\psi_0(z), \psi_1(z), \psi_2(z), \ldots$$

pourront être représentées par la formule

$$\psi_i(z) = e^{\frac{q^2}{2}z^2} \frac{d^i e^{-\frac{q^2}{2}z^2}}{dz^i}$$

et qu'on pourra les calculer successivement à l'aide de la formule

(15) $$\psi_i(z) = -q^2 z \psi_{i-1}(z) - (i-1) q^2 \psi_{i-2}(z)$$

et l'égalité

$$\psi_0(z) = 1.$$

---

[1] Bulletin de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Pétersbourg, T. I. 1859.

D'autre part nous trouvons d'après ce même mémoire la formule

$$\int_a^b \psi_i^2(x) f(x)\,dx = 1.2.3\ldots i.q^{2i}$$

pour le cas de

$$a = -\infty, \qquad b = \infty, \qquad f(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}x^2}.$$

En vertu de cette formule la fraction (14) qui détermine les limites de la différence entre les intégrales

$$\int_a^v f(x)\,dx,\ \int_a^v f_1(x)\,dx$$

se ramène pour le cas que nous examinons à la fraction

$$\frac{1}{\frac{\psi_0^2(v)}{1} + \frac{\psi_1^2(v)}{1.q^2} + \ldots + \frac{\psi_{m-1}^2(v)}{1.2.3\ldots(m-1)q^{2m-2}}},$$

dans laquelle les fonctions $\psi(v)$ seront déterminées par (15).

Pour déterminer la limite supérieure de cette fraction nous chercherons la limite inférieure de son dénominateur

$$\frac{\psi_0^2(v)}{1} + \frac{\psi_1^2(v)}{1.q^2} + \ldots + \frac{\psi_{m-1}^2(v)}{1.2\ldots(m-1)q^{2m-2}}.$$

En posant

(16) $$\frac{\psi_i^2(v)}{\Gamma(i+1)q^{2i}} = T_i, \qquad (i=0,1,\ldots,m-1)$$

nous remarquons que ce dénominateur est égal à la somme

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i.$$

Pour trouver la limite inférieure de cette somme nous allons d'abord déterminer la fonction $\theta(t)$ définie par

$$\theta(t) = \sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i,$$

où t désigne une variable quelconque.

§ 10. Pour déterminer la fonction $\theta(t)$ nous remarquons que d'après (15) on aura

$$\psi_i(v) = -q^2 v\psi_{i-1}(v) - q^2(i-1)\psi_{i-2}(v),$$
$$\psi_{i-1}(v) = -q^2 v\psi_{i-2}(v) - q^2(i-2)\psi_{i-3}(v),$$

d'où l'on tire

$$\psi_i^2(v) = q^4v^2\psi_{i-1}^2(v) + 2(i-1)q^4v\psi_{i-1}(v)\psi_{i-2}(v) + (i-1)^2q^4\psi_{i-2}^2(v),$$
$$q^4(i-2)^2\psi_{i-3}^2(v) = q^4v^2\psi_{i-2}^2(v) + 2q^2v\psi_{i-1}(v)\psi_{i-2}(v) + \psi_{i-1}^2(v),$$

et en éliminant entre ces deux équations le produit $\psi_{i-1}(v)\psi_{i-2}(v)$ nous trouvons la relation

$$\psi_i^2(v) - q^2(q^2v^2 - i + 1)[\psi_{i-1}^2(v) - (i-1)q^2\psi_{i-2}^2(v)]$$
$$- (i-1)(i-2)^2q^6\psi_{i-3}^2(v) = 0.$$

Si maintenant on y remplace les fonctions

$$\psi_i^2(v)\,,\ \psi_{i-1}^2(v)\,,\ \psi_{i-2}^2(v)\,,\ \psi_{i-3}^2(v)$$

par leurs valeurs tirées de (16), on aura l'équation

$$iT_i - (q^2v^2 - i + 1)\,T_{i-1} + (q^2v^2 - i + 1)\,T_{i-2} - (i-2)\,T_{i-3} = 0.$$

Multiplions tous les termes par t^i et faisons la somme pour toutes les valeurs de i, de $i = 0$ à $i = \infty$; nous aurons alors l'égalité

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} iT_it^i - \sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2-i+1)\,T_{i-1}t^i + \sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2-i+1)\,T_{i-2}t^i - \sum_{i=0}^{i=\infty}(i-2)\,T_{i-3}t^i = 0.$$

En remarquant que d'après (16) on a

$$T_{-1} = T_{-2} = T_{-3} = 0,$$

nous trouvons

$$\sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2 - i + 1)\,T_{i-1}t^i = \sum_{i=1}^{i=\infty}(q^2v^2 - i + 1)\,T_{i-1}t^i = \sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2 - i)\,T_it^{i+1},$$

$$\sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2 - i + 1)\,T_{i-2}t^i = \sum_{i=2}^{i=\infty}(q^2v^2 - i + 1)\,T_{i-2}t^i = \sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2 - i - 1)\,T_it^{i+2},$$

$$\sum_{i=0}^{i=\infty}(i-2)\,T_{i-3}t^i = \sum_{i=3}^{i=\infty}(i-2)\,T_{i-3}t^i = \sum_{i=0}^{i=\infty}(i+1)\,T_it^{i+3},$$

en vertu de quoi l'égalité précédente se ramène à l'égalité

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} iT_i t^i - \sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2 - i)T_i t^{i+1} + \sum_{i=0}^{i=\infty}(q^2v^2 - i - 1)T_i t^{i+2} - \sum_{i=0}^{i=\infty}(i+1)T_i t^{i+3} = 0;$$

d'où l'on déduit

$$(1 + t - t^2 - t^3)\sum_{i=0}^{i=\infty} iT_i t^{i-1} = [q^2v^2 - (q^2v^2 - 1)t + t^2]\sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i.$$

Comme d'après notre notation on a

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i = \theta(t), \quad \text{d'où} \quad \sum_{i=0}^{i=\infty} iT_i t^{i-1} = \theta'(t),$$

cette égalité se réduit à l'équation différentielle

$$\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = \frac{q^2v^2 - (q^2v^2 - 1)t + t^2}{1 + t - t^2 - t^3} = \frac{q^2v^2}{(1+t)^2} + \frac{t}{1 - t^2}$$

qui, intégrée, donne

$$\theta(t) = C\frac{e^{\frac{q^2v^2t}{1+t}}}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

La constante d'intégration C se trouve facilement en remarquant que la fonction $\theta(t)$ se réduit pour $t = 0$ à $T_0 = \psi_0^2(v) = 1$. De sorte que l'on aura

$$C = 1,$$

et par conséquent

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i = \theta(t) = \frac{e^{\frac{q^2v^2t}{1+t}}}{\sqrt{1 - t^2}}. \tag{17}$$

§ 11. D'après l'expression trouvée de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i,$$

où t désigne une quantité variable, la limite inférieure de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i$$

pourra être déterminée à l'aide des formules données dans notre mémoire mentionné plus haut *sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux.* Pour appliquer les formules, données dans ce mémoire pour des intégrales, à la somme

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i,$$

nous allons la présenter sous la forme de l'intégrale

$$\int_0^\infty Y t^x dx,$$

en désignant par Y une fonction de x qui s'annule pour toutes les valeurs de x qui ne sont pas dans le voisinage de $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ et qui pour les valeurs de x infiniment voisines de $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ a des valeurs telles que les intégrales

$$\int_0^\omega Y dx, \int_{1-\omega}^{1} Y dx, \int_{2-\omega}^{2} Y dx, \ldots$$

tendent respectivement vers les valeurs

$$T_0, T_1, T_2, \ldots$$

lorsque ω tend vers zéro. Pour une fonction Y ainsi déterminée on aura évidemment

$$\int_0^\infty Y t^x dx = \sum_{i=0}^{i=\infty} T_i t^i = \theta(t).$$

Comme la fonction Yt^x ne devient pas négative entre les limites 0 et ∞, les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^v Y t^x dx,$$

d'après les valeurs des trois intégrales

$$\int_0^\infty Y t^x dx, \int_0^\infty x Y t^x dx, \int_0^\infty x^2 Y t^x dx,$$

seront déterminées par les formules données dans les §§ 6 et 7 de notre

mémoire mentionné plus haut. En faisant dans ces formules $a = 0, b = \infty$ nous trouvons que pour

$$v = \frac{\int_0^\infty x^2 Y t^x dx}{\int_0^\infty x Y t^x dx}$$

la limite inférieure de la valeur de l'intégrale

$$\int_0^v Y t^x dx$$

sera

$$\int_0^\infty Y t^x dx - \frac{\left[\int_0^\infty x Y t^x dx\right]^2}{\int_0^\infty x^2 Y t^x dx}.$$

En remarquant que d'après l'égalité

$$\int_0^\infty Y t^x dx = \theta(t)$$

on aura

$$\int_0^\infty x Y t^x dx = t\theta'(t),$$

$$\int_0^\infty x^2 Y t^x dx = t\theta'(t) + t^2\theta''(t),$$

nous en déduisons l'inégalité

$$\int_0^{\frac{t\theta''(t)}{\theta'(t)}+1} Y t^x dx \geqq \theta(t) - \frac{t\theta'^2(t)}{\theta'(t) + t\theta''(t)}.$$

En prenant ici pour t une racine quelconque de l'équation

(18) $$\frac{t\theta''(t)}{\theta'(t)} + 1 = m - 1,$$

nous trouvons l'inégalité

$$\int_0^{m-1} Yt^x dx \geqq \theta(t) - \frac{t\theta'^2(t)}{\theta'(t) + t\theta''(t)}.$$

Cumme d'après les propriétés de la fonction Y on aura

$$\int_0^{m-1} Yt^x dx = \sum_{i=0}^{i=m-1} T_i t^i,$$

l'inégalité précédente se réduit à celle-ci:

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i t^i \geqq \theta(t) - \frac{t\theta'^2(t)}{\theta'(t) + t\theta''(t)},$$

qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de t satisfaisant à (18). Donc, en se bornant aux valeurs de t comprises entre 0 et 1 et remarquant que pour ces valeurs de t on aura

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i > \sum_{i=0}^{i=m-1} T_i t^i,$$

on devra avoir l'inégalité

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i > \theta(t) - \frac{t\theta'^2(t)}{\theta'(t) + t\theta''(t)}, \tag{19}$$

d'après laquelle nous pouvons trouver une limite inférieure de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i$$

en prenant pour t une racine de (18) comprise entre 0 et 1.

§ 12. En portant dans (18) et (19) les valeurs de $\theta(t)$, $\theta'(t)$, $\theta''(t)$ tirées de (17), on trouve

$$m - 1 = \frac{2t + \frac{(1-t)^2}{1+t} q^2v^2 + t\left[t + \frac{1-t}{1+t} q^2v^2\right]^2}{(1-t^2)\left[t + \frac{1-t}{1+t} q^2v^2\right]}, \tag{20}$$

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i > \frac{e^{\frac{q^2v^2t}{1+t}}}{\sqrt{1-t^2}} \, \frac{2t + \frac{(1-t)^2}{1+t} q^2v^2}{2t + \frac{(1-t)^2}{1+t} q^2v^2 + t\left[t + \frac{1-t}{1+t} q^2v^2\right]^2}. \tag{21}$$

La dernière inégalité nous donne la limite inférieure de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i$$

en fonction de la racine t de (20) comprise entre 0 et 1. Il est facile de voir que pour $m > 1$, comme nous le supposons toujours, l'équation (20) admettra bien une racine entre 0 et 1; mais la détermination exacte de cette racine est très difficile. Comme il ne s'agit ici que de trouver une quantité qui reste constamment plus petite que $\sum_0^{m-1} T_i$, nous pouvons y arriver sans résoudre l'équation (20). Pour cela nous tirons de (20) la valeur de $\sqrt{m-1}$ et nous divisons par elle l'inégalité (21), ce qui nous donne une inégalité qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\sum\limits_{i=0}^{i=m-1} T_i}{\sqrt{m-1}} > \frac{e^{\frac{q^2v^2t}{1+t}}\left(t+\frac{1-t}{1+t}q^2v^2\right)^{-\frac{5}{2}}\left(2t+\frac{(1-t)^2}{1+t}q^2v^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left[\frac{1}{\left(t+\frac{1-t}{1+t}q^2v^2\right)^2}+\frac{t}{2t+\frac{(1-t)^2}{1+t}q^2v^2}\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

En remarquant que la valeur de t dans cette inégalité doit être plus grande que zéro et plus petite que l'unité, nous trouvons

$$e^{\frac{q^2v^2t}{1+t}} > 1,$$

$$t+\frac{1-t}{1+t}q^2v^2 < 1+q^2v^2,$$

$$2t+\frac{(1-t)^2}{1+t}q^2v^2 < 2+q^2v^2 < 2(1+q^2v^2),$$

$$t+\frac{1-t}{1+t}q^2v^2 > t+\frac{1-t}{2}q^2v^2,$$

$$\frac{t}{2t+\frac{(1-t)^2}{1+t}q^2v^2} < \frac{1}{2},$$

en vertu de quoi l'inégalité précédente nous donne

$$\frac{\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i}{\sqrt{m-1}} > \frac{(q^2v^2+1)^{-3}}{\sqrt{2}\left[\frac{1}{\left(t+\frac{1-t}{2}q^2v^2\right)^2}+\frac{1}{2}\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{22}$$

Passant à la détermination d'une limite inférieure de

$$t+\frac{1-t}{2}q^2v^2 \quad \text{pour} \quad 0<t<1,$$

nous remarquons que l'équation (20) peut s'écrire

$$(m-1)(1-t^2) = t^2+\frac{(1-t)t}{1+t}q^2v^2+\frac{2t+\frac{(1-t)^2}{1+t}q^2v^2}{t+\frac{1-t}{1+t}q^2v^2}.$$

Comme t est comprise entre 0 et 1, tous les termes seront positifs et l'on aura

$$(m-1)(1-t^2) > t^2,$$

d'où l'on déduit

$$m(1-t^2) > 1,$$

ce qui donne

$$1-t > \frac{1}{m(1+t)} > \frac{1}{2m}.$$

D'autre part, en cherchant les maxima des fonctions

$$\frac{(1-t)t}{1+t}, \quad \frac{2t+\frac{(1-t)^2}{1+t}q^2v^2}{t+\frac{1-t}{1+t}q^2v^2}$$

pour $0<t<1$, nous trouvons qu'ils s'obtiennent pour $t=\sqrt{2}-1$, $t=1$ et qu'ils sont respectivement égaux à

$$3-\sqrt{8},\ 2,$$

en vertu de quoi l'équation précédente nous donne

$$(m-1)(1-t^2) < t^2 + 2 + (3-\sqrt{8})q^2v^2,$$

d'où l'on déduit

$$m(1-t^2) < 3 + (3-\sqrt{8})q^2v^2,$$

$$1 - t < \frac{3+(3-\sqrt{8})q^2v^2}{m(1+t)} < \frac{3+(3-\sqrt{8})q^2v^2}{m},$$

ce qui donne

$$t > 1 - \frac{3+(3-\sqrt{8})q^2v^2}{m}.$$

Ainsi, nous trouvons que

$$t > 1 - \frac{3+(3-\sqrt{8})q^2v^2}{m},$$

$$1 - t > \frac{1}{2m},$$

et l'on aura par conséquent

$$t + \frac{1-t}{2}q^2v^2 > 1 - \frac{3}{m} + \frac{\sqrt{8}-\frac{11}{4}}{m}q^2v^2 > 1 - \frac{3}{m}.$$

De sorte que l'inégalité (22), en y remplaçant

$$t + \frac{1-t}{2}q^2v^2 \quad \text{par} \quad 1 - \frac{3}{m} = \frac{m-3}{m},$$

nous donnera

$$\frac{\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i}{\sqrt{m-1}} > \frac{2(m-3)^3}{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}$$

ou bien

$$\sum_0^{m-1} T_i > \frac{2(m-3)^3\sqrt{m-1}}{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}.$$

En remarquant que, conformément à notre notation, on a

$$\sum_0^{m-1} T_i = \sum_0^{m-1} \frac{\psi_i^2(v)}{1 . 2 . 3 \ldots i . q^{2i}} = \frac{\psi_0^2(v)}{1} + \frac{\psi_1^2(v)}{1 . q^2} + \ldots + \frac{\psi_{m-1}^2(v)}{1 . 2 \ldots (m-1) q^{2m-2}},$$

nous en concluons que la fraction

$$\frac{1}{\sum_0^{m-1} \frac{\psi_i^2(v)}{1 . 2 . 3 \ldots i . q^{2i}}}$$

sera plus petite que

$$\frac{3\sqrt{3}(m^2 - 2m + 3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2 + 1)^2}{2(m-3)^2\sqrt{m-1}}.$$

Comme d'après le § 9 cette fraction donne les limites de la différence des intégrales

$$\int_{-\infty}^{v} f_1(x)dx, \int_{-\infty}^{v} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2x^2}{2}} dx$$

si l'on a les égalités

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^i f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x^i e^{-\frac{q^2x^2}{2}} dx \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1)$$

la fonction $f_1(x)$ restant constamment positive, et comme on a

$$\int_{-\infty}^{v} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x^i e^{-\frac{q^2}{2}x^2} dx = \frac{1 . 3 . 5 \ldots (i-1)}{q^{2i}} \quad \text{pour } i \text{ pair},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{\sqrt{2\pi}} x^i l^{-\frac{q^2}{2}x^2} dx = 0 \quad \text{pour } i \text{ impair},$$

nous en déduisons le théorème suivant:

Théorème.

Si la fonction $f_1(x)$ *reste constamment positive et si l'on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = \frac{1}{q}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)\,dx = \frac{1}{q^2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_1(x)\,dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-2} f_1(x)\,dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-3)}{q^{2m-2}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1} f_1(x)\,dx = 0,$$

la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx$$

sera comprise entre les limites

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,dx - \frac{3\sqrt{3}(m^2 - 2m + 3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2 + 1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,dx + \frac{3\sqrt{3}(m^2 - 2m + 3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2 + 1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}}$$

pour toutes les valeurs réelles de v.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

PAR

EMILE PICARD

À PARIS.

Je m'occupe dans ce travail des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, obtenues en exprimant que la variation première de l'intégrale double

$$\iint f\left(V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\,dy$$

est égale à zéro, en désignant par f une forme quadratique en V, $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$, les coefficients étant des fonctions quelconques de x et y. La classe d'équations ainsi obtenue jouit de diverses propriétés remarquables; j'énoncerai seulement ici que l'on peut toujours par un changement de variables et de fonction, la transformer en une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y)u = 0.$$

C'est pourquoi je reprends dans le second chapitre l'étude de cette équation, en me proposant particulièrement la détermination d'une intégrale au moyen de ses valeurs le long d'une courbe fermée. J'ai beaucoup emprunté dans cette seconde partie à un mémoire du plus grand intérêt que M. SCHWARZ a publié en 1885 sur l'équation précédente, à l'occasion du jubilé de M. WEIERSTRASS.[1]

---

[1] *Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung,* Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn WEIERSTRASS. Acta Soc. Sc. Fennicæ, T. 15. Helsingfors 1885.

I.

1. Soit V une fonction des deux variables indépendantes x et y,

$$\text{posons} \quad V_1 = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad V_2 = \frac{\partial V}{\partial y}$$

et soit $f(V, V_1, V_2)$ la forme quadratique en V, V_1 et V_2

$$AV^2 + A'V_1^2 + A''V_2^2 + 2BV_1V_2 + 2B'VV_2 + 2B''VV_1$$

où les A et B représentent des fonctions de x et y.

Je considère l'intégrale double

$$\iint f(V, V_1, V_2)dxdy$$

étendue à une certaine aire. L'équation, exprimant que la variation première de cette intégrale est nulle, s'obtient immédiatement; elle peut s'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial V} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial V_1}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial V_2}\right) = 0,$$

où, en développant, nous obtenons pour V l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre:

$$0 = A'\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + A''\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A''}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial y}$$
$$+ \left(\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - A\right)V.$$

Ceci posé, prenons une équation linéaire aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + d\frac{\partial V}{\partial x} + e\frac{\partial V}{\partial y} + fV = 0.$$

Peut-on identifier cette dernière équation à la précédente; on devrait avoir

$$A' = \lambda a, \qquad B = \lambda b, \qquad A'' = \lambda c,$$

$$\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = \lambda d, \qquad \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A''}{\partial y} = \lambda e, \qquad \frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - A = \lambda f.$$

On voit que les cinq premières équations ne sont pas, en général, compatibles. On a en effet

$$\frac{\partial(\lambda a)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda b)}{\partial y} = \lambda d, \qquad \frac{\partial(\lambda b)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda c)}{\partial y} = \lambda e.$$

La fonction λ doit satisfaire simultanément à ces deux équations qui peuvent s'écrire

$$a\frac{\partial \log \lambda}{\partial x} + b\frac{\partial \log \lambda}{\partial y} = d - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y},$$

$$b\frac{\partial \log \lambda}{\partial x} + c\frac{\partial \log \lambda}{\partial y} = e - \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial y}.$$

De ces deux équations on tire $\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}$ et $\frac{\partial \log \lambda}{\partial y}$, d'où par conséquent on déduit une équation de condition qu'il est facile d'écrire.

Cette équation est une relation entière entre a, b, c, d, e et leurs dérivées partielles jusqu'au second ordre. Soit:

$$F(a, b, c, \ldots) = 0, \tag{1}$$

F étant un polynôme. *Celui-ci sera nécessairement un invariant de l'équation,* correspondant à un changement de variables et de fonction

$$x' = \varphi(x, y),$$

$$y' = \psi(x, y),$$

$$V' = V.\chi(x, y),$$

φ, ψ et χ étant des fonctions quelconques de x et y, car la propriété qui nous occupe subsiste manifestement quand on a effectué ces changements dans l'équation.

Quand la condition (1) est remplie, λ se trouve déterminé à un facteur constant près, et par suite A', B et A''; mais il n'en est pas de même des autres coefficients, qui sont seulement liés par la relation:

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - A = \lambda f.$$

Il y aura donc alors une infinité de formes quadratiques

$$f(V, V_1, V_2)$$

pouvant servir à engendrer l'équation différentielle linéaire; cette indétermination nous sera, dans un moment, extrêmement utile.

2. Aux équations rentrant dans la catégorie précédente peuvent s'étendre dans une certaine mesure des résultats classiques dans la théorie de l'équation du potentiel.

Je considère une certaine région du plan R, à contour simple, et telle que, (x, y) occupant une position quelconque à son intérieur, la forme quadratique

$$f(V, V_1, V_2)$$

soit *définie;* soit alors dans R une aire A limitée par une courbe C. Il est tout d'abord immédiat qu'il existe une seule fonction $V(x, y)$ uniforme et continue dans A ainsi que ses dérivées partielles, et prenant sur le contour C une succession donnée de valeurs. Pour le montrer bien nettement nous n'avons qu'à considérer l'intégrale

$$\iint f(V, V_1, V_2)\,dx\,dy$$

qui aura un signe connu, soit le signe plus, si la forme est positive. Or supposons qu'il existe une fonction V, uniforme et continue dans A, et prenant sur le contour C la valeur zéro. L'intégrale

$$\text{(E)} \quad \iint (AV^2 + A'V_1^2 + A''V_2^2 + 2BV_1V_2 + 2B'VV_2 + 2B''VV_1)\,dx\,dy$$

peut s'écrire, en tenant compte de ce que V est nul sur le contour

$$-\iint V \left| A'\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + A''\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A''}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial y} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - A\right)V \right| dx\,dy.$$

L'intégrale (E) sera par suite nulle, ce qui exige puisque la forme est définie, que V soit identiquement nulle à l'intérieur de A.

Ce premier point établi, on démontrera qu'il existe *une fonction V, continue ainsi que ses dérivées dans A, satisfaisant à l'équation différentielle et prenant sur le contour une succession donnée de valeurs.* Il n'y a qu'à répéter le raisonnement classique qui se fait dans la théorie du principe

de DIRICHLET, et, bien entendu, les critiques trouvent ici leur place relativement à l'insuffisance de ce genre de démonstration, qui n'en rend pas moins d'ailleurs au moins très vraisemblable le théorème à établir. Nous passons donc, pour le moment, sur ce point qui fera tout à l'heure l'objet d'un examen approfondu (Chap. II).

3. Nous avons dit que, lorsqu'une équation linéaire satisfaisait à la condition $F = 0$, la forme quadratique correspondant à l'équation différentielle restait arbitraire dans une certaine mesure.

On peut la préciser complètement en posant, par exemple, $B'' = B' = 0$. On a alors $A = -\lambda f$, et on aura la forme:

$$f(V, V_1, V_2) = \lambda[-fV^2 + aV_1^2 + cV_2^2 + 2bV_1V_2].$$

λ est une fonction essentiellement positive (c'est une exponentielle). Les conditions pour que la forme soit définie, s'exprimeront par les inégalités

$$\begin{array}{lcl} b^2 - ac < 0, & & b^2 - ac < 0, \\ a > 0, & \text{ou} & a < 0, \\ f < 0, & & f > 0. \end{array}$$

En général, on devra chercher à tirer parti de l'indétermination des coefficients de la forme quadratique. Prenons, par exemple, l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + f(x, y)V = 0,$$

elle appartient à la classe qui nous occupe. Il suffira de prendre:

$$A' = 1, \qquad B = 0, \qquad A'' = 1,$$

et on aura

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - A = f.$$

D'après ce qui précède, dans toute région du plan ou $f(x, y)$ est négative, on peut affirmer la détermination d'une intégrale au moyen de sa valeur donnée sur le contour. D'une manière générale, la forme

$$AV^2 + V_1^2 + V_2^2 + 2B'VV_2 + 2B''VV_1$$

sera définie, si on a:

$$A > B'^2 + B''^2,$$

en remplaçant A par sa valeur, on trouve:

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - f > B'^2 + B''^2.$$

Donc les régions du plan, qui nous intéressent, sont celles *où on pourra trouver deux fonctions B' et B'' de x et y, uniformes et continues, et vérifiant cette dernière inégalité.*

Prenons le cas très particulier où f se réduit à la constante positive $+m^2$. Cherchons si on peut trouver des régions du plan où cette détermination soit possible. Soit $B' = 0$, il nous reste:

$$\frac{\partial B''}{\partial x} - m^2 > B''^2.$$

Cherchons une fonction B'' de x telle que

$$\frac{dB''}{dx} - B''^2 = m_1^2,$$

m_1^2 étant une constante supérieure à m^2, mais en différant aussi peu qu'on voudra. On aura

$$B'' = m_1 \operatorname{tg}(m_1 x + C),$$

C étant une arbitraire.

Donc dans un intervalle compris entre deux parallèles à l'axe des y, dont la distance est moindre que $\frac{\pi}{m_1}$, on pourra certainement déterminer B' et B'' de manière à satisfaire aux conditions indiquées.

Puisque m_1 diffère aussi peu qu'on veut de m, on peut dire que pour toute aire comprise dans une bande parallèle à l'axe des y, de largeur moindre que $\frac{\pi}{m}$, on se trouvera dans les conditions voulues pour l'application du théorème. On conclut de là immédiatement, par une simple transformation de coordonnées rectangulaires qui change l'équation en elle-même, que la même remarque subsistera, quelle que soit l'orientation d'une bande, à l'intérieur de laquelle soit situé le contour, pourvu que la largeur de cette bande soit moindre que $\frac{\pi}{m}$.

4. Revenons maintenant au cas général d'une équation linéaire

$$(1) \qquad a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + d\frac{\partial V}{\partial x} + e\frac{\partial V}{\partial y} + fV = 0,$$

en supposant seulement remplie la condition désignée par $F = 0$.

J'envisage d'abord l'équation

$$(2) \qquad a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + d\frac{\partial V}{\partial x} + e\frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

qui ne diffère de la première que par la suppression du terme fV; elle appartient à la même classe d'équations, puisque F ne dépend pas de f.

L'équation (2) pourra se déduire de la considération de l'intégrale double

$$(3) \qquad \iint\left[A'\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + A''\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

car l'équation

$$-A + \frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} = \lambda f$$

sera vérifiée ici, puisque $f = 0$, par $A = B'' = B' = 0$.

Or effectuons sur x et y un changement de variables

$$x = \varphi(X, Y),$$
$$y = \chi(X, Y),$$

tel que l'expression $A'\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + A''\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2$ prenne la forme

$$\mu\left[\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right)^2\right].$$

Il faudra que les deux fonctions x et y de X et Y satisfassent aux deux équations

$$A'\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2 - 2B\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial Y} + A''\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)^2 = A'\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2 - 2B\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial X} + A''\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2,$$

$$A'\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X} + A''\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial x}{\partial X} - B\left(\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X}\right) = 0.$$

Or ces équations ne sont autres que celles que l'on obtient, quand on effectue le changement de variables x et y dans la forme quadratique de différentielles

$$A''dx^2 - 2Bdxdy + A'dy^2$$

et qu'on écrit que la nouvelle forme se réduit à

$$M[dX^2 + dY^2].$$

Il résulte de cette remarque que pour trouver deux fonctions x et y de X et Y satisfaisant aux conditions indiquées, il suffira d'intégrer une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

Ainsi avec les variables X et Y l'intégrale (3) prend la forme plus simple

$$\iint \mu_1 \left[\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right)^2\right] dX dY,$$

et par suite l'équation aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + d\frac{\partial V}{\partial x} + e\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

va devenir

$$\mu_1\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu_1\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \mu_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

ou en posant $\mu_1 = \mu^2$

$$\mu\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + 2\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Tel est un premier type des équations aux dérivées partielles qui nous occupent. Nous ne prendrons pas cependant l'équation précédente comme type normal de ces équations.

Si on pose

$$V = \frac{V_1}{\mu},$$

l'équation précédente dévient:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + FV_1 = 0, \quad \text{où} \quad F = -\frac{\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}}{\mu}.$$

Telle est la forme à laquelle peut se ramener l'équation (2), et l'équa-

tion (1) se trouvera par conséquent ramenée à la même forme. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Toute équation linéaire aux dérivées partielles de la classe considérée peut, par un changement convenable de variables et de fonction, être ramenée à la forme:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + f(x, y)V = 0.$$

II.

5. Les applications faites précédemment sur l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y)u = 0$$

acquièrent donc un intérêt particulier. Nous avons vu que si, dans une certaine région du plan, on peut trouver deux fonctions continues B' et B'' telles que

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - f > B'^2 + B''^2,$$

on pourra faire usage des considérations développées dans les deux premiers paragraphes. Nous avons dit que, pour une aire comprise dans cette région, une intégrale de l'équation est déterminée par ses valeurs sur le contour. C'est là un point fondamental que nous devons maintenant reprendre, car la démonstration indiquée manque de rigueur et, de plus, ne donne aucune indication sur le moyen d'obtenir effectivement cette intégrale. Nous nous restreignons, dans cette étude, au cas où la fonction $f(x, y)$ a un signe invariable dans la région considérée; la question se présente d'ailleurs d'une manière très différente suivant que la fonction f est positive ou négative dans la région étudiée. Nous allons examiner successivement ces deux cas.

6. L'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p(x, y)u = 0,$$

dans une région du plan où $p(x, y)$ est positive, a fait l'objet d'un mémoire extrêmement remarquable de M. SCHWARZ, publié en 1885 à l'occasion du jubilé de M. WEIERSTRASS. Je vais rappeler les résultats essentiels obtenus par l'éminent géomètre de Göttingen.

Posant, pour abréger $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, on part de ce point bien connu qu'on peut trouver une fonction u de x et y, continue dans un certain contour, s'annulant le long de ce contour et vérifiant l'équation

$$\Delta u + F(x, y) = 0.$$

Cette fonction u est donnée par l'intégrale double étendue au contour

$$u = \frac{1}{2\pi} \iint F(\xi, \eta) G(\xi, \eta, x, y) d\xi d\eta$$

où $G(\xi, \eta, x, y)$ désigne la fonction de GREEN relative au contour et au point (ξ, η). Ceci posé, soit donnée arbitrairement une succession continue de valeurs le long du contour. Désignons par u_0 la fonction satisfaisant à l'équation

$$\Delta u_0 = 0$$

et prenant le long du contour les valeurs données.

On forme ensuite une suite indéfinie

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

satisfaisant respectivement aux équations

$$\begin{aligned} \Delta u_1 + p u_0 &= 0, \\ \Delta u_2 + p u_1 &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \Delta u_n + p u_{n-1} &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

toutes ces fonctions s'annulant le long du contour; elles se trouvent ainsi de proche en proche complètement déterminées et sont données par des intégrales définies.

M. SCHWARZ considère alors la série

$$\text{(S)} \qquad u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

et cherche si on peut obtenir ainsi la solution de l'équation différentielle

$$\Delta u + pu = 0$$

prenant sur le contour les valeurs données.

Pour répondre à cette question, M. SCHWARZ introduit une grandeur qui joue un rôle essentiel. Formons, en partant de $v_0 = 1$ sur le contour, la succession

$$v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$$

analogue aux u; posons alors

$$W_n = \iint p v_0 v_n \, dx dy,$$

l'intégrale double étant étendue an contour et envisageons la suite

$$W_0, W_1, \dots, W_n, \dots$$

M. SCHWARZ établit que le rapport $\frac{W_n}{W_{n-1}}$ tend vers une limite finie c. Dans le cas où c est inférieur à l'unité, on peut être certain que la série (S) converge, et résout le problème proposé.

Quand $c = 1$, il existe une intégrale de l'équation prenant la valeur zéro sur le contour et ne s'annulant pas identiquement à l'intérieur.

Tels sont les résultats si intéressants dus à M. SCHWARZ. Je considère maintenant un contour situé dans une région du plan, où non seulement $p(x, y)$ est positive, mais où de plus on peut trouver des fonctions continues B' et B'' de x et y, telles que

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - p > B'^2 + B''^2.$$

Je dis que pour ce contour, on aura nécessairement

$$c < 1.$$

Pour le voir, remarquons d'abord que W_n peut s'écrire

$$W_n = \iint p v_k v_{n-k} \, dx dy,$$

k étant un entier compris entre zéro et n, et on a aussi

$$W_n = \iint \left(\frac{\partial v_{k+1}}{\partial x} \frac{\partial v_{n-k}}{\partial x} + \frac{\partial v_{k+1}}{\partial y} \frac{\partial v_{n-k}}{\partial y} \right) dxdy,$$

formules dont on trouvera la démonstration, d'ailleurs immédiate, dans le mémoire de M. SCHWARZ. Nous avons donc

$$W_{2n} = \iint p v_n^2 \, dxdy,$$

$$W_{2n-1} = \iint \left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy,$$

et par suite

$$W_{2n-1} - W_{2n} = \iint \left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial y} \right)^2 - p v_n^2 \right] dxdy.$$

Faisons enfin une dernière transformation. La fonction v_n s'annulant sur le contour nous avons:

$$\iint \left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial y} \right)^2 - p v_n^2 \right] dxdy$$

$$= \iint \left[A v_n^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial y} \right)^2 + 2B' v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} + 2B'' v_n \frac{\partial v_n}{\partial x} \right] dxdy$$

où

$$A = \frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - p;$$

or, dans la seconde intégrale, la forme qui figure sous le signe d'intégration est définie. Nous en concluons donc que:

$$W_{2n-1} - W_{2n} > 0;$$

la limite de $\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}}$, c'est à dire c, *ne peut donc être plus grande que l'unité.* Elle ne peut d'ailleurs être ici égale à l'unité, car nous aurions une intégrale de l'équation, uniforme et continue, s'annulant le long du contour, ce qui est impossible dans la région considérée du plan. Le théorème est donc établi.

7. Il a été essentiellement supposé dans ce qui précède, que la fonction $p(x, y)$ était *positive* dans la région du plan où sont situés les contours étudiés. M. SCHWARZ ne considère pas dans son mémoire le cas où $p(x, y)$ est négatif; nous allons ici nous occuper de ce cas. Dans toute région du plan où $p(x, y)$ est négative, la démonstration donnée par la variation de l'intégrale

$$\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-pu^2\right]dxdy$$

peut trouver sa place. Il est donc *vraisemblable* qu'une intégrale se trouve déterminée par ses valeurs sur le contour; c'est ce point que nous allons établir d'une manière rigoureuse, en même temps que nous donnerons le moyen d'obtenir cette intégrale.

Considérons tout d'abord l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+|p|.u=0,$$

$|p|$ désignant la valeur absolue de p.

Si le contour est suffisamment petit, conformément à la théorie du paragraphe précédent, on pourra intégrer l'équation par une série

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$$

pour des valeurs données sur le contour, et la série des valeurs absolues est convergente. Il en résulte que

$$u_0-u_1+u_2-u_3+\ldots$$

représentera l'intégrale de l'équation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+pu=0$$

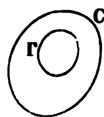
pour les mêmes valeurs données sur le contour, puisque ici $|p|=-p$.

Ceci suppose essentiellement que le contour soit assez petit pour satisfaire aux conditions du paragraphe précédent.

Avant d'aller plus loin, faisons quelques remarques importantes. Soit d'abord pour un contour C d'ailleurs quelconque dans la région où p est négatif, une fonction u vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + pu = 0$$

et prenant sur C des valeurs positives ou nulles: Je dis qu'elle ne peut prendre des valeurs négatives à l'intérieur de C. En effet la courbe séparant la région de l'aire où u est négative de celle où u est positive, serait une certaine courbe fermée Γ (qui peut avoir des parties communes avec C). Sur Γ, la fonction u serait nulle, elle devrait donc être nulle à l'intérieur. Il ne peut donc y avoir de valeurs négatives pour u. Soit alors u_0 l'intégrale de l'équation



$$\Delta u_0 = 0$$

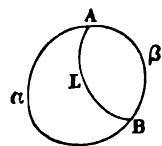
prenant sur le contour C les mêmes valeurs que u; on aura:

$$\Delta(u - u_0) + pu = 0$$

et comme u est positif, on en conclut que:

$$u - u_0 < 0,$$

car $u - u_0$, qui s'annule sur le contour, sera donnée par une intégrale dont tous les éléments sont négatifs. Ainsi pour tout point à l'intérieur u est moindre que u_0.



Supposons maintenant le contour C partagé en deux parties $A\alpha B$ et $B\beta A$, et désignons par v une intégrale de l'équation qui prenne sur la première partie la valeur zéro, et sur la seconde la valeur $+1$. Soit v_0 l'intégrale de l'équation $\Delta v_0 = 0$, satisfaisant aux mêmes conditions aux limites; on aura d'après ce qui précède $v < v_0$. Or, d'après une remarque faite par M. Schwarz, la valeur de v_0 sur une ligne L joignant le point A au point B (non tangente à C), sera moindre que q, en désignant par q un nombre plus petit que un. Nous avons donc sur L, $v < q$.

Soit enfin, pour terminer ces remarques, u une intégrale de l'équation prenant sur $A\alpha B$ la valeur zéro, et sur $A\beta B$ des valeurs positives ou négatives de module maximum g, la fonction

$$gv + u$$

satisfait à l'équation et est nulle sur la première partie du contour et positive sur l'autre; elle est donc positive sur ALB. Or on a:

$$gv + u = gq + u + g(v - q);$$

or $v - q$ est négatif; donc $gq + u$ doit être positif. On montre de même en considérant $gv - u$ que $gq - u$ est positif. *Par suite* $|u|$ *est moindre que* gq. On voit donc que le lemme fondamental dont a fait usage M. SCHWARZ dans ces belles recherches sur l'équation $\Delta u = 0$, s'étend à l'équation qui nous occupe.

8. Nous n'avons jusqu'ici pu traiter que le cas où le contour était suffisamment petit pour que nous soyons assuré de la convergence des séries employées. Nous allons montrer maintenant que, dans une région du plan où $p(x, y)$ est négatif, on peut, pour une aire quelconque, obtenir l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + pu = 0$$

prenant une succession de valeurs données sur le contour.

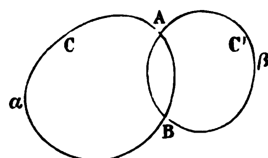
On peut en effet partager une telle aire en plusieurs autres plus petites pour lesquelles on sache, d'après ce qui précède, résoudre le problème; de plus on peut s'arranger de manière que ces aires empiètent les unes sur les autres. Si donc, sachant résoudre le problème pour deux aires ayant une partie commune, on sait le résoudre pour l'aire limitée par le périmètre extérieur des contours, nous aurons une solution complète du problème proposé. Or on voit de suite que le *procédé alterné* employé avec tant de succès par M. SCHWARZ pour l'équation

$$\Delta u = 0,$$

peut être employé pour l'équation

$$\Delta u + pu = 0.$$

C'est ce qui résulte des remarques que nous avons développées au paragraphe précédent, et il n'y aurait qu'à réproduire maintenant textuellement la belle méthode de M. SCHWARZ.[1] Si donc, par exemple, on a résolu le problème pour les contours C et C' on saura le résoudre pour l'aire limitée par $A\alpha B\beta$. Il devient manifeste alors, en allant de proche en proche, que nous pourrons intégrer l'équation



$$\Delta u + pu = 0$$

pour un contour quelconque, situé dans une région du plan où $p(x, y)$ est négatif, en nous donnant arbitrairement les valeurs de u sur ce contour.

Paris, le 4 novembre 1888.

---

[1] On trouvera exposées d'une manière très complète les recherches de M. SCHWARZ dans le troisième chapitre de la thèse de M. JULES RIEMANN sur le principe de DIRICHLET, soutenue récemment devant la faculté des sciences de Paris.

ÜBER DAS RÄUMLICHE ACHTECK

WELCHES DIE SCHNITTPUNKTE DREIER OBERFLÄCHEN ZWEITER ORDNUNG BILDEN

VON

H. DOBRINER
in FRANKFURT a. M.

HESSE beweist im 26[ten] Bande von Crelles Journal (p. 152) den Satz:

»Wenn die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung mit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 bezeichnet werden, so liegen die vier Punkte

$$(012\,,\,45)\,,\,(016\,,\,34)\,,\,(745\,,\,12)\,,\,(756\,,\,23)$$

oder, was dasselbe ist, die Schnittlinie (745, 012) und die Punkte (016, 34) und (756, 23) in einer und derselben Ebene.«[1]

Dieser Satz enthält eine Erweiterung des Pascal'schen Theorems.[2] Liegen nämlich von den acht Schnittpunkten sechs und zwar die Punkte 1, 2 ... 6 in einer Ebene E (also auf einem Kegelschnitt), so sind die Punkte (016, 34) und (756, 23) identisch mit den Punkten (16, 34) und (56, 23)

[1] An der citirten Stelle und vorher Bd. 20, p. 285—308, behandelt HESSE die obige Eigenschaft associirter Punkte synthetisch, später analytisch in den nachgelassenen Arbeiten Bd. 85, p. 304—316. und Bd. 99, p. 110—127.

[2] Vgl. HESSE: *Note über die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung.* Crelles Journ. Bd. 73, p. 371.

der Ebene E, während die Schnittlinie (745, 012) den Punkt (45, 12) enthält. Die drei Punkte (12, 45), (23, 56), (34, 61) müssen demnach, weil sie gleichzeitig der Ebene E und der durch den Hesse'schen Satz festgestellten Ebene angehören, auf einer Geraden liegen. Diese ist aber keine andere als die Pascal'sche Linie des Sechsecks, dessen aufeinander folgende Ecken die Punkte 1, 2 . . . 6 sind.

Bezeichnet man mit dem Symbol

$$H(012.3.456.7)$$

diejenige Ebene, welche durch die Schnittlinie

$$(012, 456)$$

und die Punkte

$$(32, 765), (34, 701)$$

bestimmt ist, ferner im Grenzfalle, wenn die Punkte 1, 2 . . . 6 in einer Ebene liegen, mit dem Symbol

$$P(123456)$$

diejenige Pascal'sche Linie, auf welcher die Punkte

$$(12, 45), (23, 56), (34, 61)$$

liegen, so kann man das vorhergehende dahin zusammenfassen, dass die Ebene $H(012.3.457.6)$ im Grenzfalle die Pascal'sche Linie $P(123456)$ enthält.

Hierdurch ist zwischen H-Ebenen und Pascal'schen Linien eine Correspondenz hergestellt. Es erschien mir nun als eine lohnende Aufgabe zu untersuchen, ob den Eigenschaften der Pascal'schen Linien, die sich in den Sätzen von Steiner, Kirkman, Cayley und Salmon aussprechen, auch analoge Eigenschaften der entsprechenden H-Ebenen gegenüberstehen. Von diesem Gesichtspunkte aus ist meines Wissens die räumliche Figur, welche von den Schnittpunkten dreier Flächen zweiter Ordnung gebildet wird, noch nicht behandelt worden.

Es sei mir gestattet, hier die Sätze übersichtlich zusammenzustellen welche im Grenzfalle in die vorhin erwähnten übergehen.

1.) Nach Steiner schneiden sich die drei Pascal'schen Linien

$$P(123456),\ P(143652),\ P(163254),$$

oder, was dasselbe ist, die drei Linien

$$P(123456),\ P(325416),\ P(521436)$$

in einem Punkte. Für die *H*-Ebenen gelten die beiden folgenden Sätze:

a) Die drei Ebenen

$$H(012.3.457.6),\ H(014.3.657.2),\ H(016.3.257.4)$$

schneiden sich in einer geraden Linie. (§ 6.)

b) Die drei Ebenen

$$H(012.3.457.6),\ H(032.5.417.6),\ H(052.1.437.6)$$

schneiden sich in einem Punkte der Ebene (670). (§ 7.)

2.) Dem Kirkman'schen Satze, dass sich die drei Linien

$$P(624153),\ P(463152),\ P(641352) \equiv P(264135)$$

in einem Punkte schneiden, steht der folgende gegenüber:

a) Die sechs Ebenen

$$H(062.4.157.3),\ H(046.3.157.2),\ H(064.1.357.2),$$

$$H(026.4.137.5),\ H(264.1.357.0),\ H(026.4.135.7)$$

schneiden sich in einem Punkte. (§ 8.)

Es entspricht nur einer Vertauschung der Ziffern 2, 3 mit resp. 4, 6, wenn man einen Kirkman'schen Punkt als den Schnittpunkt der Linien

$$P(123456),\ P(163245),\ P(156342) \equiv P(124365)$$

definirt. Für die *H*-Ebenen hingegen besteht das Analogon in einem neuen Satze:

b) Die vier Ebenen

$$H(012.3.457.6),\ H(016.3.247.5),\ H(015.6.347.2),$$

$$H(012.4.367.5)$$

schneiden sich in einem Punkte der Ebene (346). (§ 10.)

3.) Vertauscht man in den zuerst angegebenen Symbolen der Pascal'schen Linien, welche sich in einem Kirkman'schen Punkte schneiden, die Ziffern 2, 4, 6 cyklisch, so erhält man drei Punkte, die (nach Cayley und Salmon) auf einer Geraden liegen. Ein wörtlich gleich lautender Satz besteht für die durch Satz 2. a) definirten Punkte. (§ 9.)

Mir ist es zwar nicht gelungen, auch zu den Steiner'schen Linien und zu den Salmon'schen Punkten in der räumlichen Figur entsprechende Gebilde zu finden. Ich bezweifle aber nicht, dass sich jeder Satz über Pascal'sche Linien als ein Grenzfall eines oder mehrerer allgemeineren, die *H*-Ebenen betreffenden Sätze ergeben wird.

---

§ 1.

Zu den Hesse'schen synthetischen Beweisen seines Satzes füge ich einen neuen hinzu, der noch weitere Eigenschaften der *H*-Ebenen erschliessen soll.[1]

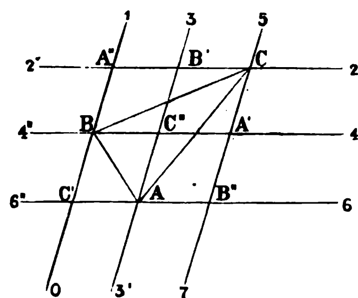


Fig. 1.

Ich ziehe die Geraden (01) und (75) und lege von den Punkten 2, 4, 6 aus die Transversalen, welche jene Geraden schneiden. Diese Transversalen (22''), (44''), (66'') bestimmen ein Hyperboloid, welches durch die sieben Punkte 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7 geht; wegen der Fundamental-Eigenschaft der Schnittpunkte dreier Flächen zweiter Ordnung muss es dann auch den achten Punkt 3 enthalten. Von diesem lässt sich also eine Linie (33') ziehen, welche die drei Transversalen schneidet. Man hat dann zweimal drei Erzeugende des Hyperboloids mit neun Schnittpunkten, die ich in folgender Weise bezeichne:

$$(01\,,\,22'') = A'',\quad (3'3\,,\,22'') = B',\quad (75\,,\,22'') = C\,,$$
$$(01\,,\,44'') = B\,,\quad (3'3\,,\,44'') = C'',\quad (75\,,\,44'') = A',$$
$$(01\,,\,66'') = C'\,,\quad (3'3\,,\,66'') = A\,,\quad (75\,,\,66'') = B''.$$

[1] Man vgl. die Anmerkung zu § 6.

Die Gerade *BC* ist die Schnittline (012, 457),
» *CA* » » » (3'23, 567) und
» *AB* » » » (3'34, 610),
folglich liegt auf *CA* der Punkt (23, 567) und auf *AB* der Punkt (34, 610). Mithin sind die Schnittlinie (012, 457) und die beiden Punkte (23, 567) und (34, 610), — wie es der Hesse'sche Satz behauptet, — in einer Ebene enthalten, nämlich in der Ebene *ABC*.

Sucht man in einer beliebigen Ebene *E* die Spuren der Geraden und Ebenen der vorstehenden Figur, so findet man durch die sechs Erzeugenden des Hyperboloids sechs Punkte eines Kegelschnitts (a, b, c, d, e, f) bestimmt, und durch die Ebene *ABC* eine Linie *P*, welche die drei Punkte (ab, de), (bc, ef), (cd, fa) enthält. Damit ist ein einfacher Beweis für das Pascal'sche Theorem gegeben. Man kann auch umgekehrt von sechs Punkten 1, 2 ... 6 eines Kegelschnitts ausgehen und zur Construction der Figur zwei beliebige von 1 und 5 aus in den Raum gezogene windschiefe Linien (10) und (57) zu Hülfe nehmen.

§ 2.

Das Symbol

$$H(012.3.456.7)$$

soll die *H*-Ebene darstellen, welche durch die Linie (012, 456) und die beiden Punkte (32, 567) und (34, 107) bestimmt ist.

Vertauscht man 0 mit 1, oder 5 mit 6, oder 2, 1, 0 mit resp. 4, 5, 6, so bleiben die Elemente, welche die *H*-Ebene definiren, dieselben. Für jede *H*-Ebene sind mithin 8 Symbole vorhanden:

$$H(012.3.456.7),\ H(102.3.456.7),\ H(012.3.465.7),\ H(102.3.465.7),$$

$$H(654.3.210.7),\ H(654.3.201.7),\ H(564.3.210.7),\ H(564.3.201.7).$$

Da nun die Zahl aller möglichen Symbole $\underline{|8}$ ist, so schliessen wir:

Es giebt $\underline{|7} = 5040$ *H*-Ebenen für die Schnittpunkte dreier gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung.

Nenne ich (012, 345) eine Linie L und (01, 234) einen Punkt V, so ist die Zahl aller Linien L gleich 280 und die Zahl aller Punkte V gleich 560. Auf jeder Linie L liegen 6 Punkte V und durch jeden Punkt V gehen 3 Linien L; so liegen z. B. auf (012, 345) die Punkte:

(12, 345), (20, 345), (01, 345), (45, 012), (53, 012), (34, 012);

durch (01, 234) gehen die Linien:

(501, 234), (601, 234), (701, 234).

Jede H-Ebene enthält eine Linie L und durch jede Linie L gehen 18 H-Ebenen, denn aus H(012.6.345.7) erhält man weitere durch (012, 345) gehende H-Ebenen, wenn man folgende Vertauschungen gesondert oder gleichzeitig vornimmt:

a) 2 mit 0 oder mit 1,
b) 3 » 4 » » 5,
c) 6 » 7.

In jeder H-Ebene liegen 8 Punkte V, von welchen 6 der Linie L angehören; diese nenne ich Punkte der zweiten Art, die beiden andern Punkte der ersten Art.

Durch jeden Punkt V gehen 3 Linien L, und durch jede derselben 18 H-Ebenen; es gehen also durch jeden Punkt V 54 H-Ebenen, für welche er ein Punkt der zweiten Art ist. Für 18 andere H-Ebenen ist er ein Punkt der ersten Art; z. B. ist (01, 234) ein Punkt der ersten Art für H(345.0.167.2) und diejenigen H-Ebenen, deren Symbole man durch folgende Vertauschungen erhält:

a) 2 mit 3 oder mit 4,
b) 5 » 6 » » 7,
c) 0 » 1.

§ 3.

Zieht man die Verbindungslinien zwischen den acht V-Punkten der Ebene H(012.3.456.7), so erhält man ausser L 13 Linien, die ich in fünf Gruppen ordne:

(a) $(32, 567) - (34, 107);$

(b) $(32, 567) - (56, 012), (34, 107) - (01, 456);$

(c) $(32, 567) - (20, 456), (32, 567) - (21, 456),$
$(34, 017) - (45, 012), (34, 017) - (46, 012);$

(d) $(32, 567) - (01, 456), (34, 017) - (56, 012);$

(e) $(32, 567) - (45, 012), (32, 567) - (46, 012),$
$(34, 017) - (20, 456), (34, 017) - (21, 456).$

Durch die beiden Punkte der Gruppe (a) geht nur die eine Ebene $H(012.3.456.7)$, ebenso durch jedes Paar der Gruppe (b). Hingegen gehen durch (32, 567) und (20, 456) die Ebenen

$$H(012.3.456.7),$$
$$H(312.0.756.4);$$

ebenso gehen durch jedes Paar der Gruppe (c) 2 H-Ebenen.

Durch (32, 567) und (01, 456) gehen:

$$H(012.3.456.7), H(230.1.756.4),$$
$$H(013.2.456.7), H(231.0.756.4);$$

durch das andere Paar aus (d) gehen gleichfalls 4 H-Ebenen.

Durch (32, 567) und (45, 012) gehen:

$$H(012.3.456.7), H(123.4.567.0),$$
$$H(012.3.457.6), H(023.4.567.1).$$

Nennt man die Verbindungslinie zweier Punkte der Gruppe (e) eine Linie Λ, so dass Λ definirt ist als die Verbindungslinie von (32, 567) und (45, 210) oder zweier anderen V-Punkte, die aus diesen hervorgehen, wenn man $0, 1 \ldots 7$ durch eine beliebige Permutation ersetzt, so kann man den Satz aussprechen:

Jede H-Ebene enthält 4 Linien Λ, und durch jede Linie Λ gehen 4 H-Ebenen.

Die Zahl der A muss also gleichfalls 5040 sein. In der That gehen von jedem Punkte V 18 Linien A aus, so dass die Zahl derselben

$$560.18:2 = 5040$$

ist.

»Die 5040 H-Ebenen und die 5040 A-Linien bilden eine räumliche Configuration von der Art, dass jede Ebene vier Linien enthält, und durch jede Linie vier Ebenen hindurch gehen.»

§ 4.

Die vorhergehende Zusammenstellung der (wesentlich) verschiedenen Paare von V-Punkten, von welchen jedes mindestens in *einer* H-Ebene liegt, wird es im einzelnen Falle ermöglichen zu entscheiden, ob sich durch zwei gegebene V-Punkte überhaupt H-Ebenen legen lassen, und wie gross etwa die Anzahl derselben ist.

Liegen vier V-Punkte in einer Ebene, und gehen durch zwei Gegenseiten des von ihnen gebildeten Vierecks je 2 (oder 4) H-Ebenen, so hat der Schnittpunkt der Gegenseiten die besondere Eigenschaft, dass sich in ihm 4 (oder mehr) H-Ebenen schneiden.

Ich führe einige Fälle dieser Art an, ohne entscheiden zu wollen, ob sie die einzigen, überhaupt möglichen sind.

Nach § 3 liegen die Linie (d) zwischen (23, 567) und (01, 456) und die Linie (e) zwischen (34, 017) und (21, 456) in der Ebene $H(012.3.456.7)$; zugleich gehen durch jede der beiden Linien überdies noch 3 H-Ebenen; folglich treffen sich in ihrem Schnittpunkt im ganzen 7 H-Ebenen.

Betrachtet man ferner die Ebene, welche durch den Punkt (5) und die Linie (012, 034) bestimmt ist; sie enthält 22 V-Punkte und unter diesen die vier

$$(12\,,\,034)\,,\,(34\,,\,012)\,,\,(05\,,\,167)\,,\,(05\,,\,367).$$

Durch die Linie $A_1 = (12\,,\,034) - (05\,,\,167)$ gehen die Ebenen

$$H_0(340.5.216.7)\,,\; H_2(305.2.167.4),$$

$$H_1(340.5.217.6)\,,\; H_3(405.2.167.3),$$

und durch die Linie $A_2 = (34, 012) - (05, 367)$ die Ebenen

$$H^0(120.5.436.7),\ H''(105.4.367.2),$$

$$H'(120.5.437.6),\ H'''(205.4.367.1);$$

in dem Schnittpunkt von A_1 und A_2 treffen sich also 8 H-Ebenen. Liegen die Punkte $1, 2 \dots 6$ in einer Ebene E, so fällt der Schnittpunkt von A_1 und A_2 in den Punkt $(12, 34)$, folglich müssen durch diesen die acht Linien gehen, in welchen E von den Ebenen $H_0, H^0, \dots, H'''$ geschnitten wird.

Nun sind aber, wie man leicht erkennt, die Durchschnitte von E mit

$$H_0\ ,\ H^0\ ,\quad H_2\quad ,\quad H''\quad ,\quad H_3\quad ,\quad H'''$$

die Linien

$$(34), (12), P(352164), P(154362), P(452163), P(254361),$$

während die Ebene E von H_1 und H' in unbestimmten, aber jedenfalls durch $(12, 34)$ gehenden Linien geschnitten wird. Wir können also schliessen, dass die angeführten Pascal'schen Linien (von denen die beiden letzten identisch sind) durch den Punkt $(12, 34)$ gehen, ein Ergebniss, das auch unmittelbar aus der Bedeutung der Symbole P hervorgeht.

Zum Schluss betrachte ich noch die Ebene durch die beiden vom Punkte (0) ausgehenden Linien $(012, 034)$ und $(015, 036)$ und in derselben die vier V-Punkte

$$(12, 034), (15, 036), (34, 012), (36, 015).$$

Durch die Verbindungslinie der beiden ersten gehen

$$H(034.5.127.6) \quad \text{und} \quad H(036.2.157.4),$$

und durch die Verbindungslinie der beiden letzten

$$H(012.6.347.5) \quad \text{und} \quad H(015.4.367.2).$$

Im Schnittpunkt der beiden Verbindungslinien treffen sich also 4 H-Ebenen.

§ 5.

Neben den Punkten V enthält jede H-Ebene noch eine Reihe anderer Punkte, die ebenfalls unmittelbare, wenn auch nicht gleich einfache, Beziehungen zu dem Systeme der Punkte o, 1 ... 7 haben.

Um sie zu finden, bediene ich mich einer Methode, die schon HESSE beim ersten Beweise[1] seines Satzes angewandt hat, und die sich auf die von ihm gefundene Eigenschaft der Schnittpunkte dreier Flächen zweiter Ordnung stützt, dass sie, auf beliebige Art in zwei Gruppen von je vier geteilt, als die Ecken zweier Polartetraeder in Bezug auf eine (durch sie bestimmte) Fläche zweiter Ordnung angesehen werden können.

a) Es seien (o, 1, 2, 3) die Ecken des einen, und (4, 5, 6, 7) die Ecken des andern Tetraeders; ich suche den Pol der Ebene H(012.7.356.4) in dem durch jene bestimmten Polarsystem. Die reciproke Polare der Linie (012, 356) geht durch die Punkte (3) und (47, 012); die Polare von (27, 456) ist die Ebene durch den Punkt (7) und die Linie (013, 456); die Polare endlich von (73, 014) ist die Ebene durch (012, 456) und (23, 567) d. h. die Ebene H(012.3.456.7).

Es besteht mithin der Satz:

»Der Punkt p, in welchem die Linie [(3) — (47, 012)] die Ebene [(7) — (013, 456)] schneidet, liegt in H(012.3.456.7).»

Ein zweiter Punkt p in H ist der Durchbohrungspunkt der Linie [(3) — (27, 564)] mit der Ebene [(7) — (563, 201)].

b) Ich polarisire ferner die Ebene H(017.3.426.5) in Bezug auf die Tetraeder (0127) und (3456). Die reciproke Polare von (017, 426) ist die Linie [(2) — (35, 017)], die Polare von (34, 015) die Ebene [(56) — (27, 346)] und die Polare von (37, 265) die Ebene durch (012, 456) und (34, 017), das ist die Ebene H(012.3.456.7):

»Der Punkt q, in welchem die Linie [(2) — (35, 017)] die Ebene [(56) — (27, 346)] trifft, liegt in H(012.3.456.7).»

[1] Crelles Journal, Bd. 20, p. 305.

In derselben H-Ebene giebt es noch drei Punkte q, deren Symbole man findet, wenn man zuerst 2, 1, 0 mit resp. 4, 5, 6, und dann 5 mit 6 vertauscht.

c) Es werde $H(015.7.326.4)$ polarisirt in Bezug auf die Tetraeder (0123) und (4567). Die reciproke Polare von (015; 326) ist die Linie [(23, 467)—(01, 457)], die Polare von (57, 264) die Ebene [(46)—(57, 013)] und die Polare von (37, 014) die Ebene [(012, 456) — (23, 567)] d. i. $H(012.3.456.7)$.

»Der Punkt r, in welchem die Linie [(23, 467) — (01, 457)] die Ebene [(46) — (57, 013)] trifft, liegt in $H(012.3.456.7)$.«

Durch dieselben Vertauschungen wie in b) findet man die Symbole der drei übrigen Punkte r, die noch in H liegen.

d) Schliesslich gelangt man, indem man $H(250.7.314.6)$ in Bezug auf (0127) und (3456) polarisirt, zu dem Satze:

»Der Punkt s, in welchem die Linie [(17, 346) — (56, 207)] die Ebene [(21) — (35, 027)] trifft, liegt in $H(012.3.456.7)$.«

Die Zahl der Punkte s ist 8; die Symbole der übrigen erhält man, wenn man gesondert und gleichzeitig 0 mit 1, 5 mit 6, und 0, 1, 2 mit resp. 5, 6, 4 vertauscht.

§ 6.

Wir gehen wieder auf die Figur des § 1 zurück, um neue Beziehungen zwischen H-Ebenen kennen zu lernen.[1]

Die Ebene ABC enthielt die Linie (012, 457) und die Punkte (32, 567) und (34, 601); es ist mithin

$$ABC = H(012.3.457.6)$$

[1] In diesem Paragraphen sind nur die Resultate der Hesse'schen Abhandlung *Über das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid* (Crelles Journal, Bd. 24, p. 40—43) reproducirt und für die Configuration der H-Ebenen verwerthet. Den Übergang aus dem Raum in die Ebene bewerkstelligt Hesse, indem er die Erzeugenden des Hyperboloids sich unendlich einer Ebene nähern lässt und dadurch zu einem Brianchon'schen Sechseck gelangt. Die oben in § 1 hergestellte Beziehung zu einem Pascal'schen Sechseck verdient, wie ich glaube, den Vorzug vor jenem Grenzübergange.

Vertauscht man die Ziffern 2, 4, 6 cyklisch, so machen sowohl die Buchstaben ABC als ihre Indices die cyklische Vertauschung mit; demnach ist

$$A\,B\,C = H(012.3.457.6) = H\,,$$
$$A'\,B'\,C' = H(014.3.657.2) = H'\,,$$
$$A''B''C'' = H(016.3.257.4) = H''.$$

Ferner ist $A'A'' = (014, 257)$, $A''A = (016, 323')$ und $AA' = (756, 343')$, mithin

$$AA'A'' = H(014.3.257.6) = H_1,$$
$$BB'B'' = H(016.3\;457.2) = H_2,$$
$$CC'C'' = H(012.3.657.4) = H_3.$$

Nun ist

$$B\,C = (012\,,\,457),$$
$$B'\,C' = (012\,,\,363'),$$
$$B''C'' = (457\,,\,363');$$

folglich schneiden sich

$BC, B'C', B''C''$	in dem Punkte		$p_1 = (012\,,\,3'36\,,\,745)$,
$CA, C'A', C''A''$	»	»	$p_2 = (014\,,\,3'32\,,\,765)$,
$AB, A'B', A''B''$	»	»	$p_3 = (016\,,\,3'34\,,\,725)$.

Diese drei Punkte gehören aber zugleich den drei Ebenen H, H', H'' an, folglich müssen sie in einer Geraden $St = (p_1 p_2 p_3)$ liegen.

Ferner findet man, dass sich schneiden

$A'A'', B'B'', C'C''$	in dem Punkte		$p = (014\,,\,3'36\,,\,752)$,
$A''A\,,\,B''B\,,\,C''C$	»	»	$p' = (016\,,\,3'32\,,\,754)$,
$AA'\,,\,BB'\,,\,CC'$	»	»	$p'' = (012\,,\,3'34\,,\,756)$.

Diese drei Punkte müssen gleichfalls, weil sie den drei Ebenen H_1, H_2, H_3 angehören, auf einer Geraden $St_0 = (pp'p'')$ liegen.

Hiermit ist der Satz bewiesen:

»Die drei Ebenen

$$H = H(012.3.457.6),$$

$$H' = H(014.3.657.2),$$

$$H'' = H(016.3.257.4)$$

schneiden sich in einer geraden Linie St.»

Die Symbole der Ebenen H_1, H_2, H_3, die sich in der Geraden St_0 schneiden, gehen aus den vorstehenden durch Vertauschung von 2 mit 4 hervor.

Im Grenzfalle, wenn die Punkte 1, 2 ... 6 in einer Ebene E liegen, wird nach den Bemerkungen in der Einleitung die Ebene E

von H in der Pascal'schen Linie $P(123456)$,
» H' » » » » $P(143652)$,
» H'' » » » » $P(163254)$

geschnitten.

Aus unserm Satze folgt dann, dass sich diese drei Pascal'schen Linien in einem Punkte treffen. In der That liefern sie, wie bekannt, einen Steiner'schen Punkt. Die Linien St sind also Analoga zu diesen Punkten der Pascal'schen Figur.

Die beiden den Linien St und St_0 entsprechenden Punkte heissen Steiner'sche Gegenpunkte.

Die Ebenen (012), (3'36), (754) sind sämmtlich Tangentialebenen des Hyperboloids und berühren dasselbe in den Punkten A'', A, A'. Mithin ist

p_1 der Pol der Ebene H_1,
p_2 » » H_2,
p_3 » » H_3.

In gleicher Beziehung stehen die Punkte p, p', p'' zu den Ebenen H, H', H''. Daraus folgt der Satz:

»Die Linien St und St_0 sind reciproke Polaren in Bezug auf das Hyperboloid, das durch die Linien (01), (57) und die Punkte 2, 3, 4, 6 bestimmt ist.»

Ihm entspricht in der Ebene der Hesse'sche Satz:

»Zwei Steiner'sche Gegenpunkte sind harmonische Pole in Bezug auf den Kegelschnitt, dem das Pascal'sche Sechseck eingeschrieben ist.»

Man erkennt leicht, dass jede H-Ebene nur durch eine Linie St geht; es giebt also im ganzen $5040:3 = 1680$ Linien St.

§ 7.

Die Symbole der drei Pascal'schen Linien, welche den der Linie St entsprechenden Steiner'schen Punkt liefern, gehen auch aus $P(123456)$ hervor, wenn man nicht $2, 4, 6$ sondern $1, 3, 5$ cyklisch vertauscht. Es fragt sich nun, welche Beziehungen bestehen zwischen den drei Ebenen

$$H = H(012.3.457.6),$$
$$'H = H(032.5.417.6),$$
$$''H = H(052.1.437.6).$$

Ich betrachte die drei Hyperboloide, welche die Construction dieser Ebenen vermitteln. Jedes von ihnen enthält die acht Punkte $0, 1 \ldots 7$; sie unterscheiden sich aber durch die Geraden (ik), die ihnen als Erzeugende zugehören; beim ersten Hyperboloid sind es die Linien (01) und (75), beim zweiten (03) und (71), beim dritten (05) und (73).

Am deutlichsten werden die folgenden Figuren die Entstehungsart der Hyperboloide und die Lage der Ebenen $H = (ABC)$, $'H = ('A'B'C)$, $''H = (''A''B''C)$ veranschaulichen.

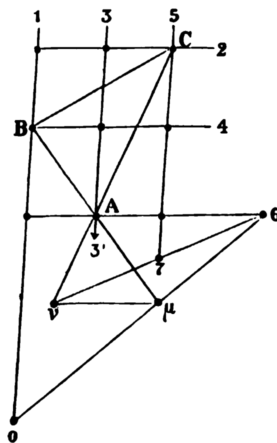


Fig. 2.

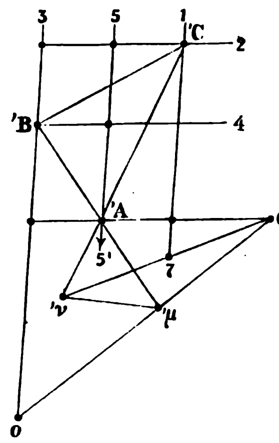


Fig. 3.

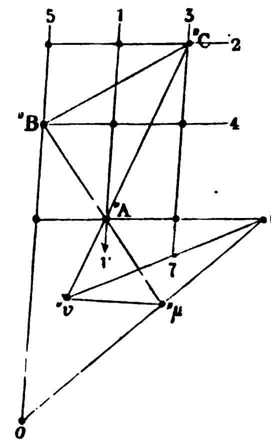


Fig. 4.

Man ersieht nun, dass in Fig. 2 (AB) mit (06) einen Punkt μ, und (AC) mit (76) einen Punkt ν gemein haben, und dass man μ mit $(06\,,\,3'34)$ und ν mit $(76\,,\,3'32)$ bezeichnen kann. Entsprechendes findet an den beiden andern Figuren statt.

Die Ebene (076) wird also

von der Ebene		H	in der Linie		$\mu\nu$	geschnitten,
»	»	$'H$	»	»	$'\mu'\nu$	» ,
»	»	$''H$	»	»	$''\mu''\nu$	» ,

worin

$$\mu = (06\,,\,3'34), \qquad '\mu = (06\,,\,5'54), \qquad ''\mu = (06\,,\,1'14)$$

drei Punkte der Linien (06) sind, und

$$\nu = (76\,,\,3'32), \qquad '\nu = (76\,,\,5'52), \qquad ''\nu = (76\,,\,1'12)$$

drei Punkte der Linie (76).

Kann ich nun nachweisen, dass das Doppelverhältniss der Punkte $(6\,,\mu\,,'\mu\,,''\mu)$ gleich dem Doppelverhältniss der Punkte $(6\,,\nu\,,'\nu\,,''\nu)$ ist, so folgt daraus, dass sich die drei Linien $\mu\nu\,,'\mu'\nu\,,''\mu''\nu$ in einem Punkte treffen, und dass der Schnittpunkt der drei Ebenen $H\,,'H\,,''H$ in die Ebene (076) fällt.

Diesen Nachweis führe ich folgendermassen. Es schneiden sich, wie ich zeigen werde

die Ebenen	$(11'2), (33'2), (55'2)$	in einer Linie	$(22°)$,
»	$(11'4), (33'4), (55'4)$	» » »	$(44°)$,
»	$(11'6), (33'6), (55'6)$	» » »	$(66°)$.

Folglich giebt es ein Hyperboloid, welches die Linien $(11'), (33'), (55')$ und die Punkte 2, 4, 6 verbindet. Auf diesem lässt sich von 6 aus eine Transversale $(66')$ ziehen, welche mit den Erzeugenden $(11'), (33'), (55')$ zu einem System gehört. Diese Erzeugenden sind aber die Durchschnittslinien entsprechender Ebenen zweier Büschel von gleichem Doppelverhältniss; d. h. die Ebenen

$$(11'2)\,,\,(33'2)\,,\,(55'2)\,,\,(66'2)$$

haben dasselbe Doppelverhältniss wie die Ebenen

$$(11'4)\,,\,(33'4)\,,\,(55'4)\,,\,(66'4).$$

Und hieraus folgt schliesslich, dass, wenn die ersten die Linie (76) in den Punkten $(''\nu\nu'\nu 6)$, die anderen die Linie (06) in den Punkten $(''\mu\mu'\mu 6)$ schneiden, die Doppelverhältnisse beider Punktreihen gleich sein müssen.

Es erübrigt nur noch zu beweisen, dass die Ebenen (11′2), (33′2), (55′2) sich in einer Linie schneiden, [die von (2) ausgeht]. Aus Fig. 2. ist ersichtlich, dass man für (33′2) auch das Symbol [(3) — (012, 752)] wählen darf. Also ist

$$(11'2) = [(1) - (052\,,\,732)],$$
$$(33'2) = [(3) - (012\,,\,752)],$$
$$(55'2) = [(5) - (032\,,\,712)].$$

Die Punkte (0) und (7) kann man durch zwei andere ersetzen, die in der Ebene (135) liegen, nämlich durch

$$\alpha = (02\,,\,135) \quad \text{und} \quad \beta = (72\,,\,135).$$

Dann hat man

$$(11'2) = [(2) - (1) - (\alpha 5\,,\,\beta 3)],$$
$$(33'2) = [(2) - (3) - (\alpha 1\,,\,\beta 5)],$$
$$(55'2) = [(2) - (5) - (\alpha 3\,,\,\beta 1)],$$

oder wenn man

$$(\alpha 5\,,\,\beta 3) = a,$$
$$(\alpha 1\,,\,\beta 5) = b,$$
$$(\alpha 3\,,\,\beta 1) = c$$

setzt:

$$(11'2) = (1a2), \qquad (33'2) = (3b2); \qquad (55'2) = (5c2).$$

Nun schneiden sich aber die drei Linien $(1a)$, $(3b)$, $(5c)$ in einem Punkte (2°), weil die 6 Linien (1α), (1β), (3α), (3β), (5α), (5β) ein Brianchon'sches Sechseck mit den auf einander folgenden Ecken $(1c3a5b)$ bilden, folglich haben die Ebenen (11′2), (33′2), (55′2) die Linie (22°) gemein.

Das Ergebniss dieser Betrachtungen ist also der Satz:

»Die drei Ebenen

$$H(012.3.457.6),$$
$$H(032.5.417.6),$$
$$H(052.1.437.6)$$

schneiden sich in einem Punkte Σ der Ebene (670).«

Man erkennt leicht, dass die Ebene $H(012.3.457.6)$ noch durch drei andere Punkte Σ geht, denn man kann die Ziffern 1, 3, 5, die cyklisch zu vertauschen sind, durch 035, 137 oder 037 ersetzen.

Jede H-Ebene enthält also 4 Punkte Σ.

Die Zahl der Punkte Σ ist $5040.4:3 = 6720$.

In jeder durch drei von den Punkten $0, 1 \ldots 7$ bestimmten Ebene liegen 120 Punkte Σ.

§ 8.

Es werde die Ebene $H(012.3.457.6)$ polarisirt in Bezug auf die Polartetraeder (0246) und (1357).

Zu (012, 457) ist die Linie [(46, 357) — (13, 026)] conjugirt; die Polare von (23, 567) ist die Ebene [(046, 157) — (13, 024)], d. i. $H(046.3.157.2)$; die Polare von (34, 016) die Ebene [(026, 157) — (24, 357)], d. i. $H(062.4.157.3)$.

Daraus folgt:

»Die Linie $\Lambda = [(46, 357) — (13, 026)]$ trifft den Durchschnitt der beiden Ebenen $H(046.3.157.2)$ und $H(062.4.157.3)$ in einem Punkte K.»

Berücksichtigt man, dass durch Λ 4 H-Ebenen hindurchgehen (§ 3), so hat man den Satz:

»Die sechs Ebenen

$$H(062.4.157.3),\ H(064.1.357.2),\ H(264.1.357.0),$$

$$H(046.3.157.2),\ H(026.4.137.5),\ H(026.4.135.7)$$

schneiden sich in einem Punkte K.»

Liegen die Punkte $1, 2 \ldots 6$ in einer Ebene E, so haben mit ihr die H-Ebenen der ersten Vertikalreihe die Pascal'schen Linien

$$P(624153) \quad \text{und} \quad P(463152)$$

gemein, jede der beiden H-Ebenen der zweiten Reihe die Pascal'sche Linie $P(641352)$, während die letzten zwei H-Ebenen mit ihr zusammenfallen. Aus unserem Satz folgt also für die ebene Figur, dass sich

»die drei Pascal'schen Linien

$$P(624153),\ P(463152),\ P(641352)$$

in einem Punkte K schneiden.»

Dieser Punkt ist bekanntlich ein Kirkman'scher Punkt; in der räumlichen Figur werden wir also K als das Analogon zu einem Kirkman'schen Punkte ansehen.[1]

K ist definirt durch das Symbol

$$K\left\{\begin{array}{c}(64\,,\,357)-(13\,,\,260)\\ H(062.4.157.3)\\ H(046.3.157.2)\end{array}\right\}.$$

Vertauscht man hierin 1) 0 mit 2, 2) 0, 1, 2, 3 mit resp. 5, 4, 7, 6 und 3) 0, 1, 2, 3 mit resp. 7, 4, 5, 6, so erhält man drei andere Punkte K, die aber alle auf derselben Linie Λ liegen. Jede Linie Λ enthält also 4 Punkte K, und

»die Zahl der Punkte K ist $5040.4 = 20160$.»

Wir suchen nun die Zahl derjenigen Permutationen der Ziffern $0, 1 \dots 7$, welche in K das Symbol einer der H-Ebenen unverändert lassen.

Zunächst setzen wir in K für 4, 6, 3, 2 resp. 6, 2, 4, 3 und finden

$$K_1\left\{\begin{array}{c}(26\,,\,457)-(14\,,\,320)\\ H(023.6.157.4)\\ H(062.4.157.3)\end{array}\right\}.$$

Vertauschen wir dann in K sowohl, wie in K_1 1) 0 mit 6, 2) 1, 5, 7 mit resp. 2, 6, 0 und 3) 1, 5, 7 mit 2, 0, 6, so bleibt das Symbol $H(062.4.157.3)$ unverändert und wir schliessen:

---

[1] Die Methode dieses Paragraphen ist eine Nachbildung derjenigen, vermittelst welcher G. Bauer die teilweise Polarität zwischen Pascal'schen Linien und Kirkman'schen Punkten nachgewiesen hat. (Abh. d. Bayer. Akad. d. Wissensch., Bd. 11, p. 111—139. 1874.)

»In jeder H-Ebene liegen 8 Punkte K, die keiner ihrer A-Linien angehören.»

Uberdies hat jede H-Ebene 4 Linien A mit je vier Punkten K, folglich enthält jede H-Ebene im ganzen 24 Punkte K, und, da durch jeden Punkt K 6 H-Ebenen gehen, ist $5040.24:6 = 20160$ die Zahl der überhaupt vorhandenen Punkte K.

§ 9.

Durch cyklische Vertauschung der Ziffern 2, 4, 6 findet man aus

$$K\left\{\begin{array}{c}(64, 357) - (13, 260)\\ H(062.4.157.3)\\ H(046.3.157.2)\end{array}\right\}.$$

$$K'\left\{\begin{array}{c}(26, 357) - (13, 420)\\ H(024.6.157.3)\\ H(062.3.157.4)\end{array}\right\}.$$

und

$$K''\left\{\begin{array}{c}(42, 357) - (13, 640)\\ H(046.2.157.3)\\ H(024.3.157.6)\end{array}\right\}.$$

K war der Pol von $H(012.3.457.6)$ in Bezug auf die Polartetraeder (0246) und (1357); K' und K'' sind mithin in demselben Polarsystem die Pole von $H'(014.3.657.2)$ und $H''(016.3.257.4)$. Da aber H, H', H'' sich in einer Linie schneiden (§ 6), so folgt:

»Die drei Punkte K, K', K'' liegen auf einer Geraden C.»

Diese Linie C entspricht einer (Salmon-) Cayley'schen Linie der Pascal'schen Figur.

Die Zahl der Linien C ist $1680.4 = 6720$, denn jeder Linie St entsprechen vier Linien C, weil man als erstes Polartetraeder jedes der vier folgenden (0246), (1246), (5246), (7246) wählen kann.

§ 10.

In § 7 ist nachgewiesen worden, dass jede durch drei der Punkte 0, 1 ... 7 bestimmte Ebene 120 Punkte enthält, die Steiner'schen Punkten der Pascal'schen Figur entsprechen. Es lässt sich nun zeigen, dass in jeder dieser Ebenen auch solche Punkte liegen, die Kirkman'schen Punkten entsprechen.

Ich ziehe in der Ebene (346) drei gerade Linien, 1) die Linie (34), 2) den Durchschnitt (016, 346) und 3) die Spur der Ebene H(016.3.427.5), d. i. die Linie, welche durch die Punkte (36, 275) und (34, 015) geht.

Diese Linien 1), 2), 3) bilden ein Dreieck Δ; in Verbindung mit demselben betrachte ich das Dreieck Δ' mit den Seiten

1') (012, 346), 2') (457, 346), 3') (36).

Die Seiten 1) und 1') schneiden sich in dem Punkte (34, 012), die Seiten 2) und 2') in dem Punkte (016, 457, 346), schliesslich die Seiten 3) und 3') in dem Punkte (36, 275). Diese drei Punkte liegen aber auf dem Durchschnitt der Ebene H(016.3.457.2) mit (346), folglich müssen die Linien, welche die entsprechenden Ecken der Dreiecke Δ und Δ' verbinden, durch einen und denselben Punkt gehen.

Die Ecke (1, 2) in Δ ist der Punkt (34, 016), die Ecke (1', 2') in Δ' der Punkt (012, 457, 346) und ihre Verbindungslinie der Durchschnitt von H(012.3.457.6) mit (346).

Die Ecke (2, 3) in Δ ist der Punkt (016, 427, 346), die Ecke (2', 3') in Δ' der Punkt (36, 457) und ihre Verbindungslinie der Durchschnitt von H(016.3.247.5) mit (346).

Da schliesslich die Ecken (1, 3) und (1', 3') in die Punkte (34, 015) und (36, 012) fallen, so können wir den Satz aussprechen:

»Die Verbindungslinie der Punkte (34, 015) und (36, 012) trifft den Durchschnitt der Ebenen H(012.3.457.6) und H(016.3.247.5) in einem Punkte x«,

oder, wenn man noch die H-Ebenen berücksichtigt, die durch die beiden V-Punkte gehen, in anderer Form:

»Die vier Ebenen

$$H(012.3.457.6)\,,\ H(015.6.347.2),$$
$$H(016.3.247.5)\,,\ H(012.4.367.5)$$

schneiden sich in einem Punkte x der Ebene (346).»

Es ist leicht zu zeigen, dass im Grenzfalle der Punkt x in einen Kirkman'schen Punkt übergeht.

§ 11.

Zum Schluss vervollständigen wir die Resultate, die mit Hilfe der in § 5 u. f. f. angewandten Methode zu erlangen sind.

Die acht Punkte 0, 1 ... 7 lassen sich auf 35 Arten in zwei Gruppen von je vier ordnen. Es giebt also überhaupt 35 Polarsysteme. Sucht man in jedem dieser Systeme den Pol einer und derselben H-Ebene, so erhält man 35 Punkte, die sich aber in 10 Gruppen von Punkten wesentlich gleichen Characters ordnen lassen. In § 5 haben wir Repräsentanten von 4 Gruppen, und in § 8 einer fünften Gruppe kennen gelernt. Von den fünf übrigen Gruppen enthält die eine nur V-Punkte als Pole von H-Ebenen.

Polarisirt man nämlich $H(012.3.456.7)$ in Bezug auf (0123) und (4567), so findet man als reciproke Polare von (012, 457) die Linie (37), als Polare von (23, 567) die Ebene (014) und als Polare von (34, 017) die Ebene [(012, 567) — (23, 456)]. Der gesuchte Pol ist also der Punkt (37, 014), der in der That mit (012, 567) und (23, 456) in einer Ebene liegt, nämlich in $H(012.3.756.4)$.

a) Ferner sei $H(012.3.456.7)$ zu polarisiren in Bezug auf (0157) und (2346). Die reciproke Polare von (012, 456) ist die Linie

$$[(57\,,\,346) — (23\,,\,017)],$$

die Polare von (34, 017) die Ebene (265) und die Polare von (23, 567) die Ebene [(46) — (01, 234)]. Da nun die beiden letztgenannten Ebenen die Punkte (6) und (401, 234, 256) gemein haben, so besteht der Satz:

»Die vier Punkte

$$(6), (014, 234, 256), (57, 346), (23, 017)$$

liegen in einer und derselben Ebene.»

Man kann den Satz auch wie folgt bewiesen. Auf der Linie (657, 346), welche die Punkte (6) und (57, 346) verbindet, liegt auch der Punkt (34, 567). Durch diesen und durch den Punkt (23, 017) gehen aber die Ebenen $H(014.3.256.7)$ und (234), folglich liegt auf ihrer Verbindungslinie der Punkt

$$(014, 256, 234).$$

b) Es seien (2347) und (0156) die Tetraeder und $H(012.3.456.7)$ wiederum die Ebene, deren Pol bestimmt werden soll. Die reciproke Polare von (012, 456) ist der Linie [(56, 347) — (01, 237)], die Polare von (23, 567) die Ebene [(47) — (01, 234)] oder, was dasselbe ist, die Ebene [(7) — (014, 234)], die Polare von (34, 017) die Ebene [(7) — (256, 234)]. Es muss also der Durchschnitt der beiden Ebenen [(7) — (014, 234)] und [(7) — (256, 234)] mit den beiden Punkten (56, 347) und (01, 237) in einer und derselben Ebene liegen. Da aber dieser Durchschnitt durch die Punkte (7) und (014, 234, 256) bestimmt ist, so hat man den Satz:

»Die vier Punkte

$$(7), (014, 234, 256), (56, 347), (01, 237)$$

liegen in einer und derselben Ebene.»

Dieser Satz lässt sich auch folgendermassen beweisen.

Die beiden von (7) ausgehenden Linien (765, 347) und (710, 723) bestimmen eine Ebene, welche die drei Punkte

$$(7), (56, 347), (01, 237)$$

enthält. Auf der ersten Linie liegt aber der Punkt (34, 567), und auf der zweiten der Punkt (23, 017). Durch diese beiden gehen die Ebenen $H(014.3.265.7)$ und (234), folglich liegt auf ihrer Verbindungslinie auch der Punkt

$$(014, 265, 234).$$

c) Polarisirt man drittens $H(012.3.456.7)$ in Bezug auf (0134) und (2567), so findet man:

»Die Punkte (34, 567) und (27, 013) liegen mit dem Durchschnitt der beiden Ebenen [(2) — (014, 567)] und [(01) — (34, 256)] in einer Ebene.»

d) Zum Schluss suche ich noch den Pol von H(047.3.126.5) in Bezug auf die Polartetraeder (0127) und (3456). Die reciproke Polare von (047, 126) ist die Linie [(12, 356) — (07, 345)], die Polare von (37, 256) die Ebene [(012, 456) — (34, 701)] d. i. H(012.3.456.7) und die Polare von (13, 045) die Ebene [(702, 456) — (36, 127)] d. i. H(720.3.654.1). Der Durchschnitt von H(012.3.456.7) und H(720.3.654.1) liegt also mit den Punkten (12, 356) und (07, 345) in einer Ebene.

Berücksichtigt man, welche H-Ebenen durch diese Punkte gehen, so gelangt man zu dem Satz:

»Die sechs Ebenen

H(012.3.456.7), H(120.7.635.4), H(071.2.435.6),

H(720.3.645.1), H(127.0.635.4), H(072.1.435.6)

schneiden sich in einem Punkte.»

NOTE SUR LES HUIT POINTS D'INTERSECTION DE TROIS SURFACES DU SECOND ORDRE

PAR

H.-G. ZEUTHEN
À COPENHAGUE.

Le rédacteur en chef des Acta Mathematica ayant bien voulu me montrer, avant l'impression, le mémoire précédent de M. DOBRINER — ce qu'il a pu faire parce que mon nom figure dans la rédaction — je profite de cette circonstance pour joindre quelques remarques à cet intéressant travail.

On sait que de nos jours beaucoup de géomètres se sont occupés des huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre, dans le but de trouver la construction la plus simple du huitième point lorsque les sept points du groupe sont donnés; mais ils se sont contentés d'en étudier un petit nombre de propriétés convenables à ce but. M. DOBRINER, au contraire, a fait des propriétés de la configuration une étude indépendante des applications constructives.

L'intérêt des propriétés qu'il a trouvées s'augmente par la circonstance qu'elles font espérer d'en trouver d'autres qui ne sont pas moins simples. En effet, en généralisant les propriétés connues de la configuration formée de six points d'une conique plane, il est parvenu à des résultats qui ne sont pas symétriques par rapport à la configuration des huit points dont il s'occupe.

Il est donc probable qu'il existe des propriétés plus générales qui s'étendent d'une manière uniforme à tous les huit points.

Ces propriétés ne se rattacheront pas immédiatement aux plans de HESSE, dont la détermination par les huit points n'est pas symétrique; mais on peut substituer au théorème de HESSE le théorème suivant:

I. 12345678 *étant un octogone inscrit à trois surfaces du second ordre qui n'appartiennent pas à un faisceau, les droites d'intersection des plans passant par les triples opposés de sommets:*

$$a \equiv \binom{123}{567}, \qquad b \equiv \binom{234}{678}, \qquad c \equiv \binom{345}{781}, \qquad d \equiv \binom{456}{812}$$

se trouvent sur une surface du second ordre. Nous les appellerons ses *directrices* en reservant le nom de *génératrices* aux droites de l'autre génération de la surface.

Ce théorème comprend celui de HESSE. En effet, la droite joignant le point (34, 678) au point (45, 812) rencontre évidemment les droites b, c et d. Selon le théorème énoncé il doit donc rencontrer aussi la quatrième droite a, ce qui est le théorème de HESSE.

De l'autre côté on peut déduire le théorème énoncé de celui de HESSE. A cet effet il suffit de considérer trois droites, telles que

$$[(34, 678), (45, 812)],$$

qui rencontrent, selon le théorème de HESSE, les quatre droites a, b, c, d. Cela suffit pour démontrer que celles-ci se trouvent sur une surface du second ordre.

Le théorème énoncé présentant une certaine analogie avec celui de PASCAL, on doit obtenir les théorèmes qui correspondent d'une manière semblable à ceux de STEINER, KIRKMAN etc., en étudiant les relations qui ont lieu entre les surfaces que déterminent, conformément au théorème énoncé, un *groupe* d'octogones inscrits aux surfaces données.

Nous nous bornerons ici à établir le théorème suivant:

II. *Les génératrices des surfaces du second ordre qui correspondent de la manière indiquée dans le théorème* I *aux* 16 *octogones:*

12 34 56 78
21 34 56 78
12 43 56 78
21 43 56 78
12 34 65 78
21 34 65 78
12 43 65 78
21 43 65 78
12 34 56 87
21 34 56 87
12 43 56 87
21 43 56 87
12 34 65 87
21 34 65 87
12 43 65 87
21 43 65 87

appartiendront à un complexe linéaire.

On voit que, dans les 16 octogones que nous venons d'énumerer, les quatre couples de sommets 12, 34, 56, 78 se succèdent dans le même ordre, mais que le groupe est formé par la combinaison de toutes les inversions de sommets appartenant au même couple.

Pour démontrer le théorème II nous rappellerons que deux couples quelconques de directrices (génératrices) d'une surface du second ordre peuvent être pris pour des droites conjuguées par rapport à un complexe linéaire, qui contiendra les génératrices (directrices) de la surface, et que le complexe est déterminé par ces deux couples de droites conjuguées; il est aussi déterminé par un couple de droites conjuguées et par une droite donnée du complexe qui ne rencontre pas les droites conjuguées données, ou par cinq droites du complexe.

Si nous déterminons un complexe par les deux couples de droites conjuguées a et d, b et c de la surface du théorème I, il suffira de démontrer que ce complexe a des rapports analogues avec la surface correspondant à l'octogone 21345678, qu'on obtient par une seule des inversions permises. Cette dernière surface contient les directrices

$$a \equiv \binom{123}{567}, \qquad e \equiv \binom{134}{678}, \qquad f \equiv \binom{345}{782}, \qquad d \equiv \binom{456}{812}.$$

Il s'agit donc de démontrer que le complexe déterminé par les couples de droites conjuguées a et d, e et f coïncide avec celui que nous avons déjà déterminé. Cela résulte du fait que ces deux complexes ont en commun le couple de droites conjuguées a et d et la droite du complexe 34, qui rencontre b et c, e et f sans rencontrer a et d.

En considérant la détermination par les droites conjuguées a et d, b et c, on voit que le complexe contient les droites suivantes

$$12 \;,\; 34 \;,\; 56 \;,\; 78,$$

et

$$\binom{123}{564},\ \binom{128}{567},\ \binom{342}{781},\ \binom{345}{786},$$

et, en appliquant à ces dernières droites les inversions permises, on en trouve encore les droites suivantes

$$\binom{124}{563},\ \binom{127}{568},\ \binom{341}{782},\ \binom{346}{785}.$$

En établissant directement que ces 12 droites appartiennent à un seul complexe linéaire, on aura de nos théorèmes I et II une démonstration indépendante du théorème de Hesse. En effet, les droites a et d, qui rencontrent quatre de ces droites, formeront un couple de droites conjuguées, de même b et c, e et f, et on sait que deux couples de droites conjuguées se trouvent toujours sur une surface du second ordre.

Afin d'avoir une détermination de notre complexe qui ne dépend pas de notre théorème I, nous commencerons par démontrer que les droites

$$m \equiv \binom{123}{563}, \qquad n \equiv \binom{124}{564}, \qquad p \equiv \binom{341}{781}, \qquad q \equiv \binom{342}{782}$$

sont des directrices d'une surface du second ordre.

En effet, il résulte de la propriété fondamentale des huit points donnés, qui il existe une surface du second ordre qui passe par les droites 56 et 78 et les points 1, 2, 3, 4. On a donc entre les rapports anharmoniques des plans joignant les droites 56 et 78 à ces points l'équation suivante

$$56(1234) = 78(1234),$$

ou bien, en désignant par 1″ et 2″ les points où les plans 781 et 782

rencontrent la droite 34, et par $3'$ et $4'$ les points où les plans 563 et 564 rencontrent la droite 12:

$$(123'4') = (1''2''34).$$

Or les droites

$$11'', 22'', 3'3, 4'4$$

sont identiques respectivement à

$$p, q, m, n.$$

On voit donc que ces quatre droites sont des génératrices ou directrices d'une surface du second ordre.

Le complexe linéaire qui a les couples de droites m et n, p et q pour droites conjuguées contiendra les droites

$$12, 34, 56, 78$$

et

$$\binom{123}{564}, \binom{124}{563}, \binom{341}{782}, \binom{342}{781}.$$

En intervertant entre eux les deux couples de points, 12 et 56, on trouve un complexe qui a encore m et n pour droites conjuguées, et qui contient encore la droite 78, qui ne rencontre pas m et n. Ce nouveau complexe doit donc coïncider avec le précédent. On voit ainsi qu'il contient les droites $\binom{345}{786}$, $\binom{346}{785}$, et de même par l'inversion des deux couples de points, 34 et 78, qu'il contient les droites $\binom{127}{568}$, $\binom{128}{567}$.

Comme le complexe trouvé contient les quatre droites 12, 34, 56, 78, tous les trois complexes qu'on obtiendrait en ordonnant les quatre couples de points 12, 34, 56, 78 de différentes manières, doivent contenir la congruence déterminée par ces même quatre droites. On aura donc, en désignant le complexe déjà considéré par (12, 34, 56, 78) et en appliquant des notations analogues aux deux autres, le théorème suivant:

III. *Les complexes* (12, 34, 56, 78), (12, 56, 78, 34), (12, 78, 34, 56) *ont en commun une congruence de droites.*

Copenhague le 27 février 1889.

ÜBER EINE BESONDERE ART DER KETTENBRUCH-ENTWICKLUNG REELLER GRÖSSEN

VON

A. HURWITZ
in KÖNIGSBERG i. Pr.

Bezeichnet x_0 irgend eine reelle Grösse und setzt man

$$(1)\quad x_0 = a_0 - \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2}, \quad \ldots, \quad x_n = a_n - \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \ldots,$$

wo die ganze Zahl a_n immer so bestimmt ist, dass die Differenz $x_n - a_n$ zwischen die Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ fällt, so erhält man für x_0 die Kettenbruch-Entwicklung

$$(2)\qquad x_0 = a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \ldots}}$$

In der vorliegenden Arbeit habe ich diese Art von Kettenbruch-Entwicklung in eingehender Weise untersucht. Ich hatte diese Untersuchung schon abgeschlossen, als ich auf eine in den Göttinger Nachrichten aus dem Jahre 1873 erschienene Note[1] von Herrn MINNIGERODE aufmerksam wurde. Herr MINNIGERODE zeigt, dass die Entwicklung (2) immer periodisch wird, wenn x_0 einer ganzzahligen quadratischen Gleichung genügt, sowie dass diese periodische Entwicklung zur vollständigen Auflösung der Pell'schen Gleichung dienen kann. Diese Resultate ergeben

[1] *Über eine neue Methode, die Pell'sche Gleichung aufzulösen.*

sich auch im Verlaufe der vorliegenden Untersuchung; sie bezeichnen indessen hier nur einzelne Glieder in der Kette von Sätzen, deren Gesammtheit die Theorie jener Kettenbruch-Entwicklung ausmacht. Dass die Entwicklung (2) für quadratische Irrationalitäten periodisch wird, folgt übrigens auch unmittelbar aus den Sätzen, welche ich im 11ten Bande dieser Zeitschrift über die Entwicklung complexer Grössen in Kettenbrüche bewiesen habe.

Bei jeder besonderen Art von Kettenbruch-Entwicklung ist das Gesetz, nach welchem die Näherungsbrüche fortschreiten, von fundamentaler Bedeutung. Es handelt sich namentlich darum, zu untersuchen ob und in welcher Weise die Nenner der Näherungsbrüche wachsen, sowie festzustellen wie stark die entwickelte Grösse durch die Näherungsbrüche angenähert wird. Es ist nun merkwürdig, dass diese Untersuchung mit Nothwendigkeit darauf führt, neben der ursprünglichen noch eine zweite Art von Kettenbruch-Entwicklung in Betracht zu ziehen. Dieser Umstand ist bislang wohl deshalb nirgends hervorgehoben worden, weil in den bisher ausführlich untersuchten Fällen die zweite Entwicklungs-Art mit der ursprünglichen identisch ist. In dem vorliegenden Falle werden dagegen, wie man sehen wird, beide Arten gänzlich von einander verschieden.

§ 1. *Bezeichnungen.*

Im Folgenden werde ich die Kettenbruch-Entwicklung einer Grösse x_0, welche aus den Gleichungen

$$(3)\qquad x_0 = a_0 - \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2}, \quad \ldots, \quad x_n = a_n - \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \ldots$$

hervorgeht, abkürzend durch

$$(4)\qquad x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1})$$

bezeichnen. Den n^{ten} Näherungsbruch dieser Entwicklung nenne ich

$$5)\qquad \frac{p_n}{q_n} = (a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

und denke mir den Zähler und Nenner dieses Bruches durch die bekannten Recursionsformeln

$$(6). \qquad p_n = a_n p_{n-1} - p_{n-2}, \qquad q_n = a_n q_{n-1} - q_{n-2},$$

mit Hülfe der Anfangswerthe

$$p_{-2} = 0, \qquad p_{-1} = 1; \qquad q_{-1} = 0, \qquad q_0 = 1$$

berechnet. Zwischen den eingeführten Grössen bestehen die Identitäten:

$$(7) \qquad p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n = 1,$$

$$(8) \qquad x_0 = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}}.$$

Ich bemerke ferner, dass ich die reellen Zahlen (und nur von solchen wird in der Folge die Rede sein) in der üblichen Weise durch die Punkte einer unbegrenzten Geraden repräsentire. Diese Gerade betrachte ich als in sich geschlossen, entsprechend dem Umstande, dass die beiden Werthe $+\infty$ und $-\infty$ als nicht verschieden gelten sollen. Durchläuft ein Punkt die Gerade von $-\infty$ bis $+\infty$, so bewegt er sich in derjenigen Richtung, welche ich als die »positive» bezeichnen will. Die Gesammtheit der Werthe, die ein Punkt nach und nach repräsentirt, welcher sich in positivem Sinne von a bis b bewegt, bilden das Intervall $a \ldots b$. Soll die obere oder untere Grenze eines Intervalles nicht zu demselben gerechnet werden, so deute ich dieses dadurch an, dass ich die betreffende Grenze in Klammern setze. Hiernach wird z. B. eine Grösse ξ in das Intervall $-\frac{1}{2} \ldots \left(\frac{1}{2}\right)$ fallen, wenn $-\frac{1}{2} \leq \xi < \frac{1}{2}$ und in das Intervall $2 \ldots (-2)$, wenn entweder $\xi \geq 2$ oder $\xi < -2$ ist. Um auszudrücken, dass eine Grösse ξ in ein bestimmtes Intervall $a \ldots b$ fällt, werde ich mich bisweilen der symbolischen Gleichung

$$(9) \qquad \xi = a \ldots b$$

bedienen. Ich stelle hier einige Regeln zusammen, nach welchen man

mit solchen symbolischen Gleichungen rechnen kann. Mit der Gleichung (9) bestehen immer gleichzeitig die folgenden Gleichungen:

$$(10) \qquad \xi + k = a + k \ldots b + k,$$

wo k positiv oder negativ sein kann.

$$(11) \qquad k\xi = ka \ldots kb,$$

wenn k positiv ist.

$$(12) \qquad -\xi = -b \ldots -a.$$

$$(13) \qquad -\frac{1}{\xi} = -\frac{1}{a} \ldots -\frac{1}{b}.$$

Allgemein besteht der Satz:

Bezeichnen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend welche Grössen, so folgt aus (9) die Gleichung

$$\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta} \ldots \frac{\alpha b + \beta}{\gamma b + \delta},$$

oder die Gleichung

$$\frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta} = \frac{\alpha b + \beta}{\gamma b + \delta} \ldots \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta},$$

je nachdem $\alpha\delta - \beta\gamma$ positiv oder negativ ist.

Ferner ist es gestattet aus den beiden Gleichungen

$$(14) \qquad \begin{cases} \xi = a \ldots b \\ \xi' = a' \ldots b' \end{cases}$$

die Folgerung

$$(15) \qquad \xi + \xi' = a + a' \ldots b + b'$$

zu ziehen: 1.) wenn $a < b$ und $a' < b'$, 2.) wenn $a < b, a' > b', a + a' > b + b'$ und 3.) wenn $a > b$, $a' < b'$, $a + a' > b + b'$ ist. Falls in einer der Gleichungen (9) und (14) die eine oder andere Grenze mit einer Klammer versehen ist, so muss auch in jeder abgeleiteten Gleichung die entsprechende Grenze in Klammern gesetzt werden.

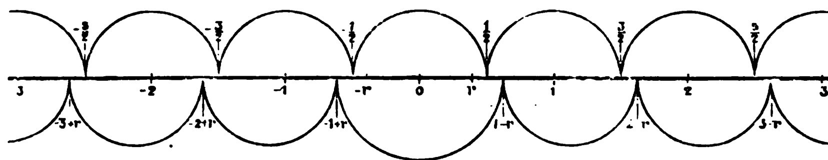
§ 2. *Die Theilnenner der Kettenbruch-Entwicklung.*

Die Kettenbruch-Entwicklung, welche ich untersuchen will, entsteht für eine beliebige Grösse x_0, wenn man die Gleichungskette (3) nach folgender Massgabe bildet. Man markire auf der Geraden, deren Punkte die reellen Zahlen repräsentiren, die Punkte $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots$ und theile dadurch die ganze unendliche Gerade in unendlich viele Intervalle[1]

$$a - \frac{1}{2} \ldots \left(a + \frac{1}{2}\right), \; (a = -\infty \ldots + \infty).$$

Dann soll in der Gleichungskette (3) für a_n immer diejenige ganze Zahl genommen werden, welche in demselben Intervalle wie x_n liegt.

Fig. 1.



Diese Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, welche die Theilnenner der Kettenbruch-Entwicklung bilden, unterliegen gewissen allgemeinen Gesetzen, welche ich zunächst aufstellen will. Aus der Gleichung

$$x_i - a_i = -\frac{1}{2} \ldots \left(\frac{1}{2}\right), \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

folgt

$$x_{i+1} = -\frac{1}{x_i - a_i} = 2 \ldots (-2).$$

---

[1] Siehe Figur 1. Um die Anschaulichkeit der Figur zu erhöhen, ist über jedes der in Betracht kommenden Intervalle ein nach oben gerichteter Halbkreis beschrieben. Die in der Figur ebenfalls gezeichneten, nach unten gerichteten Halbkreise sollen in gleicher Weise eine später zu betrachtende Intervall-Eintheilung anschaulich machen.

Daher können die Theilnenner $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ nur Zahlen aus der Reihe

$$\pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$$

sein. Wenn ferner einer dieser Theilnenner, etwa a_i, den Werth 2 erhält, so ist

$$x_i = 2 \ldots \left(2 + \frac{1}{2}\right),$$

also

$$x_i - a_i = 0 \ldots \left(\frac{1}{2}\right),$$

und

$$x_{i+1} = -\frac{1}{x_i - a_i} = \infty \ldots (-2).$$

Es kann daher, wenn $a_i = 2$ ist, der folgende Theilnenner a_{i+1} nur der Reihe

$$-2, -3, \ldots$$

entnommen sein. Ebenso ergiebt sich: wenn $a_i = -2$ ist, so ist der auf a_i folgende Theilnenner a_{i+1} nothwendig eine Zahl der Reihe

$$+2, +3, \ldots.$$

Hiermit sind nun alle Gesetze, welche für die Theilnenner gelten, erschöpft, wie aus folgendem Satze hervorgeht:

Es sei

(16) $$x_0 = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, y_{n+1}),$$

wo $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ ganze Zahlen, y_{n+1} eine reelle Grösse bezeichnen. Dann stellt die Gleichung (16) die hier betrachtete Kettenbruch-Entwicklung der Grösse x_0 vor, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.) *Die Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sind absolut genommen grösser als 1.*

2.) *Ist eine der Zahlen $b_1, b_2, \ldots$ etwa b_i, gleich 2 bez. gleich -2, so ist die folgende b_{i+1} eine negative bez. positive Zahl.*

3.) *Die Grössen y_{n+1} und $b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ gehören dem Intervalle $2 \ldots (-2)$ an.*

Der Beweis dieses Satzes lässt sich leicht durch den Schluss von $n-1$ auf n führen. Man setze nämlich

(17) $$y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}},$$

so wird

(18) $$x_0 = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, y_n).$$

Nun gehören aber y_n und $b_{n-1} - \frac{1}{y_n}$ dem Intervalle $2 \ldots (-2)$ an. Für y_n ist dieses Voraussetzung, während es für $b_{n-1} - \frac{1}{y_n}$ ohne Weiteres einleuchtet, falls b_{n-1} eine Zahl der Reihe $+3, -3, +4, -4, \ldots$ ist. Wenn aber b_{n-1} gleich 2 oder -2 sein sollte, so wird b_n nach Voraussetzung eine negative bez. positive Zahl, folglich nach (17) y_n negativ bez. positiv. Daher liegt auch in diesen Fällen $b_{n-1} - \frac{1}{y_n}$ in dem Intervalle $2 \ldots (-2)$. Der Kettenbruch (18) befriedigt nun alle Bedingungen unseres Satzes; nehmen wir also den Satz als richtig an für den Fall, dass die Anzahl der Zahlen $b_1, b_2, \ldots$ gleich $n-1$ ist, so folgt, dass die Gleichung (18) die hier betrachtete Entwicklung der Grösse x_0 darstellt. Verbinden wir hiermit die Gleichung (17), so zeigt sich, dass auch der Kettenbruch (16), welcher n Zahlen $b_1, b_2, \ldots$ enthält, die behauptete Eigenschaft besitzt. Nun gilt aber der zu beweisende Satz offenbar, wenn $n = 1$ ist, und folglich gilt er für jeden Werth von n.

Aus diesem Satze ergeben sich durch Specialisirung die folgenden weiteren Sätze:

»Der Kettenbruch $k = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ stellt die hier betrachtete Entwicklung der rationalen Zahl k vor, wenn die Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ die Bedingungen 1) und 2) des vorigen Satzes befriedigen und b_n von -2 verschieden ist.« Ferner:

Der n^{te} Näherungsbruch der Entwicklung

(19) $$x_0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1})$$

besitzt selber die Entwicklung

(20) $$\frac{p_n}{q_n} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

oder die Entwicklung

(21) $$\frac{p_n}{q_n} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} + 1, 2),$$

je nachdem a_n *von* -2 *verschieden oder gleich* -2 *ist.*

Endlich folgt aus der Entwicklung

$$x_0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1})$$

die andere

$$-x_0 = (-a_0, -a_1, -a_2, \ldots, -a_n, -x_{n+1}),$$

mit einziger Ausnahme des Falles, wo $x_{n+1} = 2$ ist. In diesem Falle lautet die Entwicklung von $-x_0$:

$$-x_0 = (-a_0, -a_1, -a_2, \ldots, -a_n + 1, 2).$$

§ 3. *Die Nenner der Näherungsbrüche.*

Ich betrachte nun die Nenner

(22) $$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad q_2, \quad q_3, \ldots$$

der Näherungsbrüche, welche zu der Entwicklung einer beliebigen Grösse

(23) $$x_0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

gehören. Aus der Gleichung

(24) $$q_n = a_n q_{n-1} - q_{n-2},$$

folgt

$$|q_n| \geqq |a_n q_{n-1}| - |q_{n-2}| \geqq 2|q_{n-1}| - |q_{n-2}|,$$

wo $|q_n|$, $|a_n q_{n-1}|, \ldots$, wie üblich, die absoluten Beträge von $q_n, a_n q_{n-1}, \ldots$ bedeuten. Wenn nun $|q_{n-1}| > |q_{n-2}|$, so wird auch, der vorhergehenden Ungleichung zufolge, $|q_n| > |q_{n-1}|$ sein. Da aber offenbar $|q_1| > |q_0|$,

so folgt nach und nach $|q_2| > |q_1|, |q_3| > |q_2|, ..$ und allgemein $|q_n| > |q_{n-1}|$. Es liegt also der Quotient

$$(25) \qquad \mathfrak{Q}_n = \frac{q_{n-1}}{q_n}$$

beständig zwischen -1 und $+1$.

Man denke sich nun für x_0 alle möglichen reellen Grössen genommen, und für jeden einzelnen Werth von x_0 die Reihe der Quotienten $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \ldots$ gebildet. Alle diese Quotienten werden durch Punkte des Intervall's $-1 \ldots +1$ repräsentirt, und man erhält also in diesem Intervalle, den unendlich vielen Werthen von $\mathfrak{Q}_n$ entsprechend, unendlich viele Punkte. Es ist nun eine für unsere Theorie fundamentale Frage, welches die untere und welches die obere Grenze dieser unendlichen Menge von Punkten ist. Bezeichnen wir den reciproken Werth von $\mathfrak{Q}_n$ mit

$$(26) \qquad Q_n = \frac{q_n}{q_{n-1}},$$

so finden wir, vermöge der Gleichung (24)

$$(27) \quad Q_1 = a_1, \quad Q_2 = a_2 - \frac{1}{Q_1}, \quad Q_3 = a_3 - \frac{1}{Q_2}, \ldots, Q_n = a_n - \frac{1}{Q_{n-1}}, \ldots,$$

woraus für Q_n die Kettenbruch-Entwicklung

$$(28) \qquad Q_n = (a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1)$$

folgt. Betrachten wir nun zunächst nur solche Werthe von x_0, für welche keiner der Theilnenner $a_1, a_2, \ldots$ gleich 2 oder -2 wird. Es ist dann

$$Q_1 = a_1 = 3 \ldots -3,$$

$$Q_2 = a_2 - \frac{1}{Q_1} = 3 - \frac{1}{3} \ldots -3 - \frac{1}{-3},$$

$$Q_3 = a_3 - \frac{1}{Q_2} = 3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3}} \ldots -3 - \cfrac{1}{-3 - \cfrac{1}{-3}},$$

u. s. f. Die Zahlen $3, (3, 3), (3, 3, 3), \ldots$ bilden nun eine Reihe be-

ständig abnehmender Grössen, deren untere Grenze der unendliche Kettenbruch

$$(3, 3, 3, 3, \ldots)$$

ist. Bezeichnen wir mit

$$(29) \qquad r = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,382\ldots$$

die kleinere Wurzel der Gleichung

$$r + \frac{1}{r} = 3,$$

so ist $\frac{1}{r}$ der Werth des unendlichen Kettenbruchs. Die untere und obere Grenze der betrachteten Werthe Q_n sind also $-\frac{1}{r}$ bez. $+\frac{1}{r}$, und folglich die Grenzen von $\mathfrak{Q}_n = \frac{1}{Q_n}$ bez. $-r$ und $+r$. Betrachten wir nun auch den Fall, wo in der Entwicklung von x_0 die Werthe 2 und -2 als Theilnenner auftreten. Ist a_{n+1} der erste Theilnenner, welcher gleich 2 oder -2 ist, so wird

$$Q_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = \begin{cases} 2 - r \ldots 2 + r \\ \text{oder} \quad -2 - r \ldots -2 + r \end{cases}$$

also a fortiori

$$Q_{n+1} = +2 - r \ldots -2 + r$$

und

$$\mathfrak{Q}_{n+1} = \frac{1}{Q_{n+1}} = -1 + r \ldots 1 - r,$$

da $\frac{1}{2-r} = 1 - r$ ist. Die in diesem Falle stattfindenden Grenzen $-1 + r$ und $1 - r$ erweisen sich nun als die allgemein richtigen, wie aus dem folgenden Satze hervorgeht:

Entwickelt man irgend eine Grösse x_0 in den Kettenbruch

$$x_0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots),$$

und bezeichnet $\mathfrak{Q}_n$ den reciproken Werth von

$$Q_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1),$$

so liegt $\mathfrak{Q}_n$ *stets zwischen* $-r$ *und* $1-r$, *wenn* a_n *von* -2 *verschieden ist, und zwischen* $-1+r$ *und* r, *wenn* a_n *von* 2 *verschieden ist.*

Da nach den Gleichungen (27)

$$Q_{n+1} = a_{n+1} - \mathfrak{Q}_n$$

ist, da ferner für einen positiven Werth von a_{n+1} der Theilnenner a_n nicht gleich 2, für einen negativen Werth von a_{n+1} nicht gleich -2 sein kann, so lässt sich unser Satz auch so aussprechen:

Der Werth von

$$Q_{n+1} = (a_{n+1}, a_n, \ldots, a_1)$$

liegt im Intervalle $a_{n+1} - r \ldots a_{n+1} + 1 - r$, *wenn* a_{n+1} *positiv ist, und im Intervalle* $a_{n+1} - 1 + r \ldots a_{n+1} + r$, *wenn* a_{n+1} *negativ ist.*

Nehmen wir an unser Satz gelte für den Index $n-1$, so folgt aus der zweiten Form des Satzes

$$Q_n = a_n - r \ldots a_n + 1 - r, \quad \text{für} \quad a_n = 2, 3, \ldots,$$

und

$$Q_n = a_n - 1 + r \ldots a_n + r, \quad \text{für} \quad a_n = -2, -3, \ldots.$$

Die verschiedenen Intervalle für $a_n = 2, 3, \ldots$ reihen sich an einander, ebenso die Intervalle für $a_n = -2, -3, \ldots$. Indem man dieses beachtet erkennt man, dass

$$Q_n = 3 - r \ldots -2 + r,$$

wenn a_n von 2 verschieden ist, und

$$Q_n = 2 - r \ldots -3 + r,$$

wenn a_n von -2 verschieden ist. Im ersten Falle ergiebt sich

$$\mathfrak{Q}_n = \frac{1}{Q_n} = -1 + r \ldots r,$$

im zweiten Falle

$$\mathfrak{Q}_n = \frac{1}{Q_n} = -r \ldots 1 - r.$$

Unser Satz gilt daher für den Index n, wenn er für den Index $n-1$ als gültig vorausgesetzt wird. Nun ist der Satz aber für $n = 1$, wo $Q_1 = a_1$ ist, offenbar richtig, und also gilt er allgemein für jeden Werth von n.

Da $Q_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$ in allen Fällen dem Intervalle $2 - r \ldots - 2 + r$ angehört, also dem absoluten Betrage nach grösser als $2 - r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist, so ergiebt sich das Corollar:

»Die absoluten Beträge der Nenner $q_0, q_1, q_2, \ldots$ der Näherungsbrüche wachsen stärker als die Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Exponenten $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.»

§ 4. *Die Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art.*

Der im vorigen Paragraphen bewiesene Satz führt dazu, neben der bisher betrachteten Art von Kettenbruch-Entwicklung noch eine zweite einzuführen. Man theile nämlich die unendliche Gerade durch die Punkte[1]

$$\pm(1-r),\ \pm(2-r),\ \pm(3-r),\ \ldots$$

in die Intervalle

$$\ldots,(-3+r)\ldots-2+r,\ (-2+r)\ldots-1+r,\ (-1+r)\ldots(1-r),$$
$$1-r\ldots(2-r),\ 2-r\ldots(3-r),\ \ldots.$$

Ist nun x_0 eine beliebige Grösse, so bilde man die Gleichungskette

$$(30) \qquad x_0 = a_0 - \frac{1}{x_1},\quad x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2},\quad \ldots,\quad x_n = a_n - \frac{1}{x_{n+1}},\quad \ldots,$$

wo allgemein a_n diejenige ganze Zahl bezeichnet, welche in demselben Intervalle wie x_n liegt. Um die hierdurch definirte neue Art der Kettenbruch-Entwicklung von der früheren bequem unterscheiden zu können, will ich sie als die *zweite* Art, dagegen die frühere als die *erste* Art be-

[1] Siehe Figur 1.

zeichnen. Der Satz des letzten Paragraphen lässt sich dann offenbar so aussprechen:

Entwickelt man eine Grösse x_0 in einen Kettenbruch erster Art

$$x_0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \tag{31}$$

und bezeichnen q_{n-1}, q_n die Nenner zweier aufeinander folgender Näherungsbrüche dieses Kettenbruches, so ist vermöge der Gleichung

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1) \tag{32}$$

der Bruch $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ in einen Kettenbruch zweiter Art entwickelt.

Die beiden Arten von Kettenbruch-Entwicklungen stehen in einem Verhältniss der Reciprocität zu einander. Dieses spricht sich darin aus, dass der vorstehende Satz im Wesentlichen richtig bleibt, wenn man die Worte »erster Art» und »zweiter Art» mit einander vertauscht.

In der That: die in der Gleichungskette (30) auftretenden Grössen befriedigen die Bedingung

$$x_i - a_i = -\frac{1}{x_{i+1}} = (-1 + r) \ldots (1 - r),$$

also

$$x_{i+1} = (2 - r) \ldots (-2 + r). \qquad {\scriptstyle (i=0,1,2,\ldots)}$$

Folglich sind die Zahlen a_{i+1} $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ sämmtlich der Reihe

$$+2, -2, +3, -3, \ldots$$

entnommen. Ist ferner a_{n-1} positiv, so ist

$$x_{n-1} - a_{n-1} = -\frac{1}{x_n} = \quad -r \ldots (1 - r),$$

also

$$x_n = 3 - r \ldots (-2 + r),$$

folglich kann a_n nicht gleich 2 werden. Ebenso ergiebt sich, dass auf eine negative Zahl a_{n-1} nicht der Werth $a_n = -2$ folgen kann.

In Hinblick auf § 2 ergiebt sich hieraus, dass der Kettenbruch (32)

von der ersten Art ist, wenn (31) die Entwicklung zweiter Art von x_0 vorstellt. Nur der Fall, in welchem $a_1 = -2$ ist, bildet eine Ausnahme; in diesem Falle wird nämlich die Entwicklung erster Art von $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ nicht durch (32), sondern durch die Gleichnng

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2 + 1, 2)$$

gegeben sein. Diese Überlegungen lassen sich auch in folgenden Satz zusammenfassen, welcher dem Satze des vorigen Paragraphen an die Seite zu stellen ist:

Wenn $x_0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ *ein Kettenbruch zweiter Art ist, so liegt*

$$Q_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$$

1.) *im Intervalle* $a_n - \frac{1}{2} \ldots a_n + \frac{1}{2}$, *wenn* a_n *von* 2 *und* -2 *verschieden ist,*

2.) *im Intervalle* $a_n \ldots a_n + \frac{1}{2}$, *wenn* $a_n = 2$ *ist,*

3.) *im Intervalle* $a_n - \frac{1}{2} \ldots a_n$, *wenn* $a_n = -2$ *ist.*

Dabei können die Intervallgrenzen $a_n - \frac{1}{2}$, $a_n + \frac{1}{2}$ *nur für* $n = 2$, *die Grenze* a_n *nur für* $n = 1$ *erreicht werden.*

Zur Beurtheilung, ob ein vorgelegter Kettenbruch ein solcher von der zweiten Art ist, kann folgender Satz dienen, welchen wir indessen in der Folge nicht verwenden werden und deshalb nur beiläufig anführen: »Es sei

$$x_0 = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, y_{n+1}),$$

wo $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ganze Zahlen, y_{n+1} eine reelle Grösse bezeichnen. Dann stellt diese Gleichung stets die Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art von x_0 vor, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.) Die Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sind absolut genommen grösser als 1.

2.) Wenn eine der Zahlen $b_0, b_1, b_2, \ldots$, etwa b_i, positiv bez. negativ ist, so ist die folgende b_{i+1} von 2 bez. -2 verschieden.

3.) Die Grösse y_{n+1} liegt im Intervalle $(3-r) \ldots (-2+r)$, wenn $b_n > 0$ und im Intervalle $(2-r) \ldots (-3+r)$, wenn $b_n < 0$ ist.»

§ 5. *Convergenz der betrachteten Kettenbrüche.*

Der Grad der Convergenz eines Kettenbruches

$$x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \tag{33}$$

wird durch die Grösse der Differenz $x_0 - \frac{p_n}{q_n}$ gemessen. Nach den Gleichungen (7) und (8) ist

$$x_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{-1}{q_n^2\left(x_{n+1} - \frac{1}{Q_n}\right)}, \tag{34}$$

wobei wieder

$$Q_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

gesetzt ist. Aus den Gleichungen (27) folgt

$$x_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = (x_{n+1} - a_{n+1}) + Q_{n+1}. \tag{35}$$

Wenn nun der Kettenbruch (33) von der ersten Art ist, so unterscheiden wir folgende Fälle:

1.) Die Zahl a_{n+1} ist von ± 2 verschieden. Nach § 3 haben wir dann

$$Q_{n+1} = (3-r) \ldots (-3+r).$$

Ferner ist

$$x_{n+1} - a_{n+1} = -\frac{1}{2} \ldots \left(\frac{1}{2}\right),$$

also, durch Addition,

$$x_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = \left(\frac{5}{2} - r\right) \ldots \left(-\frac{5}{2} + r\right).$$

2.) Es ist $a_{n+1} = 2$. Alsdann kommt:

$$Q_{n+1} = (2 - r) \dots (3 - r),$$

$$x_{n+1} - a_{n+1} = 0 \dots \left(\frac{1}{2}\right),$$

also

$$x_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = (2 - r) \dots \left(\frac{7}{2} - r\right).$$

3.) Es ist $a_{n+1} = -2$; in diesem Falle hat man

$$Q_{n+1} = (-3 + r) \dots (-2 + r),$$

$$x_{n+1} - a_{n+1} = -\frac{1}{2} \dots (0),$$

und also

$$x_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = \left(-\frac{7}{2} + r\right) \dots (-2 + r).$$

Wie man sieht liegt $x_{n+1} - \frac{1}{Q_n}$ in allen Fällen im Intervalle $(2 - r) \dots (-2 + r)$ und ist also absolut genommen grösser als $2 - r$.

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn der Kettenbruch (33) von der zweiten Art ist. Denn, wenn a_{n+1} einen positiven Werth hat, so ist nach dem letzten Satze des § 4

$$Q_{n+1} = (2) \dots \infty;$$

ferner ist

$$x_{n+1} - a_{n+1} = -r \dots (1 - r),$$

also

$$x_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = (2 - r) \dots \infty.$$

Wenn zweitens a_{n+1} einen negativen Werth hat, so ist

$$Q_{n+1} = -\infty \dots (-2),$$

$$x_{n+1} - a_{n+1} = (-1 + r) \dots r,$$

also

$$x_{n+1} - \frac{1}{Q_n} = -\infty \dots (-2 + r).$$

In beiden Fällen ist also $x_{n+1} - \frac{1}{Q_n}$ absolut genommen grösser als $2 - r$.

Aus den vorstehenden Betrachtungen ergiebt sich unmittelbar der Satz:

Entwickelt man die Grösse x_0 in einen Kettenbruch erster oder zweiter Art:

$$x_0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

und setzt man

(36) $$x_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta_n(1-r)}{q_n^2} = \frac{\theta_n(\sqrt{5}-1)}{2q_n^2}, \qquad (n=1,2,\ldots)$$

so sind die Grössen θ_n sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als 1.

Hieraus folgt beiläufig, dass die beiden Entwicklungen einer jeden Grösse x_0 convergent sind, und dass beide abbrechen, wenn x_0 eine rationale Zahl ist.

§ 6. *Äquivalente Grössen.*

Zwei Grössen x und x' heissen äquivalent, wenn eine Gleichung der Form

(37) $$x' = \frac{\alpha x - \beta}{\gamma x - \delta}$$

stattfindet, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen bezeichnen, welche der Bedingung

(38) $$\beta\gamma - \alpha\delta = 1$$

genügen. Entwickelt man zwei Grössen x und x' nach irgend einem Gesetze in die Kettenbrüche

(39) $$\begin{cases} x = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}), \\ x' = (a'_0, a'_1, \ldots, a'_m, x'_{m+1}), \end{cases}$$

wo die Theilnenner $a_0, \ldots, a_n, a'_0, \ldots, a'_m$ ganzzahlige Werthe haben, so sind x und x' äquivalent, wenn für irgend einen Werth von n und irgend einen Werth von m

(40) $$x_{n+1} = x'_{m+1}$$

wird. Ich will nun untersuchen, ob umgekehrt aus der Äquivalenz zweier Grössen x und x' die Gleichung (40) gefolgert werden kann, wenn die Entwicklungen (39) beide von der ersten Art sind. Da der Fall wo x und x' rational sind sich unmittelbar in bejahendem Sinne erledigt, so

setze ich voraus, dass x und x' bei dieser Untersuchung irrationale Werthe besitzen.

Zwischen den irrationalen Grössen x und x' bestehe also die Gleichung (37). Wir entwickeln x in den Kettenbruch erster Art

(41) $$x = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}),$$

dessen Einrichtung die Gleichung

(42) $$x = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}}$$

ergiebt. Durch Elimination von x zwischen (37) und (42) kommt:

(43) $$x' = \frac{p x_{n+1} - p'}{q x_{n+1} - q'},$$

wobei zur Abkürzung

(44) $$\begin{cases} p = \alpha p_n - \beta q_n, & p' = \alpha p_{n-1} - \beta q_{n-1}, \\ q = \gamma p_n - \delta q_n, & q' = \gamma p_{n-1} - \delta q_{n-1} \end{cases}$$

gesetzt ist. Ich entwickle nun $\frac{p}{q}$ in einen Kettenbruch erster Art

(45) $$\frac{p}{q} = (b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}, b_r).$$

Wenn sich hierbei $b_r = 2$ ergiebt, so will ich für diese Entwicklung eventuell die andere

$$\frac{p}{q} = (b_0, b_1, \ldots, b_{r-1} - 1, -2)$$

substituiren, und zwar dann, wenn in der Entwicklung von

(46) $$x_{n+1} = (a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots) = (a_{n+1}, x_{n+2})$$

die Zahl a_{n+1} positiv ist. Diese Möglichkeit denke ich in die Gleichung (45) aufgenommen, so dass in derselben b_r sowohl gleich 2 als gleich -2 werden kann. Ferner ersetze ich eventuell $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, wodurch zugleich nach (44) $-p$ und $-q$ an die Stelle von p und q treten, und zwar nach der Massgabe, dass der letzte Nä-

herungsbruch des Kettenbruches (45) den Zähler $+p$ und den Nenner $+q$ erhalten soll. Dies vorausgeschickt, sei nun

(47) $$\frac{p''}{q''} = (b_0, b_1, \ldots, b_{r-1})$$

der vorletzte Näherungsbruch des Kettenbruches (45), so ist

$$p''q - q''p = 1.$$

Da nun aus den Gleichungen (44) auch

$$p'q - q'p = (\beta\gamma - \alpha\delta)(p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n) = 1$$

folgt, so muss sein

(48) $$q'' = q' + tq, \qquad p'' = p' + tp,$$

wo t eine ganze Zahl bedeutet. Diese ganze Zahl kann aber von einem bestimmten n ab nur einen der Werthe $0, 1, -1$ haben. Um dieses zu beweisen, bemerke ich, dass

$$\frac{q'}{q} = \frac{\gamma p_{n-1} - \delta q_{n-1}}{\gamma p_n - \delta q_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{\gamma}{q_n(\gamma p_n - \delta q_n)},$$

ferner der Gleichung (36) zufolge

$$q_n p_n = q_n^2 x - \theta_n(1 - r),$$

und daher endlich

$$\frac{q'}{q} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{\gamma}{q_n^2(\gamma x - \delta) - \gamma\theta_n(1 - r)} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \varepsilon_n$$

ist. Der mit ε_n bezeichnete Bruch wird offenbar mit wachsenden Werthen von n unendlich klein und besitzt das Vorzeichen von $\frac{\gamma}{\gamma x - \delta}$. Sei nun erstens a_{n+1} positiv. Dann sind a_n und b_r von 2 verschieden. Daher bestehen in Hinblick auf den Satz des § 3 die Gleichungen:

$$\frac{q''}{q} = (-1 + r) \ldots (r),$$

$$-\frac{q'}{q} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} - \varepsilon_n = (-r - \varepsilon_n) \ldots (1 - r - \varepsilon_n),$$

und folglich

$$t = \frac{q''}{q} - \frac{q'}{q} - = (-1 - \varepsilon_n) \ldots (1 - \varepsilon_n).$$

Wenn zweitens a_{n+1} negativ ist, so sind a_n und b_r von -2 verschieden. Daher ist:

$$\frac{q''}{q} = (-r) \ldots (1 - r),$$

$$-\frac{q'}{q} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} - \varepsilon_n = (-1 + r - \varepsilon_n) \ldots (r - \varepsilon_n),$$

und folglich

$$t = \frac{q''}{q} - \frac{q'}{q} = (-1 - \varepsilon_n) \ldots (1 - \varepsilon_n).$$

Die ganze Zahl t liegt also stets zwischen $-1 - \varepsilon_n$ und $1 - \varepsilon_n$. Wenn daher $\frac{\gamma}{\gamma x - \delta}$ und also auch ε_n positiv ist, so kann t nur gleich 0 oder -1 sein, wenn dagegen $\frac{\gamma}{\gamma x - \delta}$ negativ ist, so hat t einen der Werthe 0 und 1.

Aus den Gleichungen (43) und (48) folgt nun

(50) $$x' = \frac{p(x_{n+1} + t) - p''}{q(x_{n+1} + t) - q''} = (b_0, b_1, \ldots, b_r, x_{n+1} + t),$$

wobei nach (46)

(51) $$x_{n+1} + t = (a_{n+1} + t, a_{n+2}, \ldots) = (a_{n+1} + t, x_{n+2})$$

ist. Tragen wir den Werth von $x_{n+1} + t$ aus (51) in (50) ein, so erhalten wir

(52) $$x' = (b_0, b_1, \ldots, b_r, a_{n+1} + t, x_{n+2}),$$

während die Entwicklung erster Art von x lautet:

(53) $$x = (a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}, x_{n+2}).$$

Die Gleichung (52) wird aber ebenfalls die Entwicklung erster Art von x' darstellen, wenn nicht einer von folgenden vier Fällen eintritt:

1.) $a_{n+1} = 2$, $t = -1$; 2.) $a_{n+1} = 3$, $a_{n+2} > 0$, $t = -1$;

3.) $a_{n+1} = -2$, $t = 1$; 4.) $a_{n+1} = -3$, $a_{n+2} < 0$, $t = 1$.

Sei nun $\frac{\gamma}{\gamma x - \delta}$ positiv. Dann sind nur die beiden ersten Fälle möglich, weil t nicht gleich 1 sein kann. Da nun auf $a_{n+1} = 2$ ein negativer Theilnenner a_{n+2}, welcher also jedenfalls von 2 und 3 verschieden ist, folgen wird, so dürfen wir den Fall 1.) ausschliessen. Aber auch der Fall 2.) kann ausgeschlossen werden, wenn wir annehmen, dass nicht von einem bestimmten Werthe von n ab beständig $a_n = 3$ ist. Ebenso ergiebt sich, falls $\frac{\gamma}{\gamma x - \delta}$ negativ ist, dass die Fälle 3.) und 4.), welche dann die einzig möglichen sind, ausgeschlossen werden können, wenn wir annehmen, dass nicht von einem bestimmten Werthe von n ab beständig $a_n = -3$ ist. Unter diesen Voraussetzungen wird also (52) die Entwicklung erster Art von x' darstellen, sobald n eine gewisse Grenze übersteigt. Da nun ferner die Elimination von x_{n+2} zwischen den beiden Gleichungen (52), (53) zu der ursprünglichen Gleichung $x' = \frac{\alpha x - \beta}{\gamma x - \delta}$ zurückführen muss, so können wir folgenden Satz aussprechen:

Zwischen den beiden Grössen x und x' bestehe die Gleichung

$$x' = \frac{\alpha x - \beta}{\gamma x - \delta}, \tag{54}$$

so dass x und x' äquivalent sind. Es seien ferner

$$\begin{cases} x = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}), \\ x' = (a'_0, a'_1, \ldots, a'_m, x'_{m+1}), \end{cases} \tag{55}$$

die Kettenbruch-Entwicklungen erster Art jener Grössen, und es werde vorausgesetzt, dass die Theilnenner $a_0, a_1, \ldots$ nicht von einem bestimmten ab bis ins Unendliche beständig gleich 3 oder beständig gleich -3 sind. Dann kann man n und m stets so wählen, dass $x_{n+1} = x'_{m+1}$ ist, und dass die Gleichung (54) durch Elimination von x_{n+1} zwischen den beiden Gleichungen (55) entsteht.

Wenn die in diesem Satze gemachte Voraussetzung über die Theilnenner a_n nicht zutrifft, so ist x entweder zu $r = (0, -3, -3, \ldots)$

oder zu $-r = (0, 3, 3, \ldots)$ äquivalent. Diese beide Zahlen sind auch einander äquivalent, wie aus der Gleichung

$$-r = \frac{-r+1}{r-2}$$

ersichtlich ist. Ist umgekehrt x zu r äquivalent, so sind die Theilnenner a_n von einem bestimmten ab beständig gleich 3 oder -3. Denn andernfalls könnten wir unseren Satz auf x und $x' = r$ anwenden und würden zu dem Widerspruch gelangen, dass in der Entwicklung von r die Theilnenner nicht beständig gleich 3 sein könnten. Hieraus geht nun Folgendes hervor:

Die über die Theilnenner a_n im vorigen Satze eingeführte Voraussetzung ist gleichbedeutend damit, dass x nicht zu $r = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ äquivalent sein soll.

Die zu r äquivalenten Grössen zerfallen in zwei Classen. Die Grössen der einen Classe haben eine Entwicklung erster Art, bei welcher schliesslich die Theilnenner von einem bestimmten ab beständig gleich -3 sind, während bei der zweiten Classe die Theilnenner schliesslich beständig gleich $+3$ werden.

Im Folgenden wird sich ein Criterium dafür ergeben, ob eine zu r äquivalente Grösse in die eine oder die andere Classe gehört. Ich bemerke noch, dass die in diesem Paragraphen bewiesenen Sätze wörtlich richtig bleiben, wenn an Stelle der Kettenbruch-Entwicklung erster Art überall die zweite Art gesetzt wird.

§ 7. *Zahlenpaare.*

Es seien x_0 und y_0 zwei von einander verschiedene irrationale Grössen. Man setze nun

$$(56) \qquad \begin{cases} x_0 = a_0 - \dfrac{1}{x_1}, \\ y_0 = a_0 - \dfrac{1}{y_1}, \end{cases}$$

wo die ganze Zahl a_0 so bestimmt ist, dass $x_0 - a_0$ zwischen $-\frac{1}{2}$ und

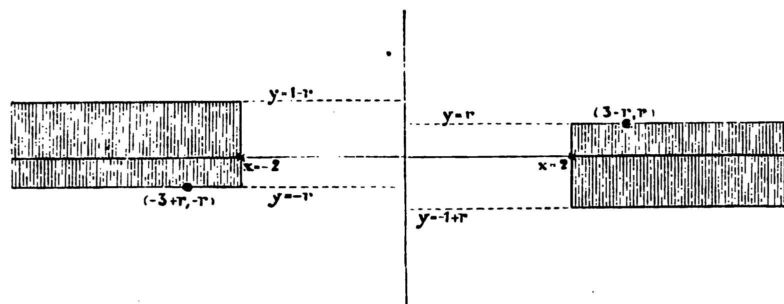
$+\frac{1}{2}$ liegt. Das auf diese Weise erhaltene Zahlenpaar (x_1, y_1) nenne ich dem Paare (x_0, y_0) nach rechts benachbart.[1] Umgekehrt heisse (x_0, y_0) dem Paare (x_1, y_1) nach links benachbart. Die Grössen (x_1, y_1) sind offenbar wieder irrational und von einander verschieden; sie sind ferner in eindeutiger Weise durch x_0, y_0 bestimmt. Ich führe nun noch einen neuen Begriff, den des *reducirten* Zahlenpaares ein. Es werde nämlich jedes Zahlenpaar (x, y) durch den Punkt einer Ebene mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y dargestellt. In dieser Ebene grenze ich durch die Geraden

$$x = 2, \quad x = -2, \quad y = r, \quad y = -r, \quad y = -1 + r, \quad y = 1 - r,$$

$$\left(r = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

zwei unendliche Streifen ab, welche ich als im Unendlichen zusammen-

Fig. 2.



hängend und also als ein einziges Gebiet R bildend ansehe. In Figur 2. ist das Gebiet R durch Schraffirung kenntlich gemacht. *Ein Zahlenpaar (x, y), welches durch einen Punkt des Gebietes R repräsentirt wird, heisse »reducirt«.* Dabei bemerke ich, dass von der Begrenzung des Gebietes R einzig und allein die beiden Punkte

$$x = 3 - r, \quad y = r \quad \text{und} \quad x = -3 + r, \quad y = -r$$

zu dem Gebiete gerechnet werden sollen.

[1] Die Bezeichnung lehnt sich an eine in der Theorie der quadratischen Formen übliche an.

Ich bilde nun, von irgend einem Paare (x_0, y_0) ausgehend, die Reihe von Paaren:

(57) $$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1}), \ldots,$$

von denen jedes dem vorhergehenden nach rechts benachbart ist, und will untersuchen, wann in der Reihe (57) ein reducirtes Paar vorkommt. Zu dem Ende bemerke ich, dass nach der Bildungsweise des rechten Nachbars die Gleichungen bestehen:

(58) $$\begin{cases} x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}), \\ y_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, y_{n+1}), \end{cases}$$

von welchen die erste die Kettenbruch-Entwicklung erster Art der Grösse x_0 darstellt. Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt:

$$y_0 = \frac{p_n y_{n+1} - p_{n-1}}{q_n y_{n+1} - q_{n-1}},$$

und hieraus durch Auflösung nach y_{n+1}:

$$y_{n+1} = \frac{q_{n-1} y_0 - p_{n-1}}{q_n y_0 - p_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n} - \frac{1}{q_n(q_n y_0 - p_n)},$$

oder, in Rücksicht auf (36):

(59) $$y_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} - \frac{1}{q_n^2(y_0 - x_0) + \theta_n(1 - r)} = \frac{q_{n-1}}{q_n} - \varepsilon_n,$$

wo ε_n mit wachsenden Werthen von n unendlich klein wird und das Vorzeichen von $y_0 - x_0$ besitzt. Es sind nun einige Fälle zu unterscheiden:

I.) Es sei $y_0 - x_0 > 0$ und die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von x_0 endige nicht mit der Periode $(-3, -3, \ldots)$. Dann ist ε_n positiv und wir können n beliebig gross und so wählen, dass a_n weder gleich -2 noch gleich -3 wird. Für diesen Werth von n ist dann entweder

$$x_{n+1} = 2 \ldots \infty, \quad \text{also} \quad a_{n+1} = 2, 3, \ldots, \qquad a_n = 3, \pm 4, \ldots,$$

oder

$$x_{n+1} = -\infty \ldots -2, \quad \text{also} \quad a_{n+1} = -2, -3, \ldots, \quad a_n = 2, 3, \pm 4, \ldots.$$

Im ersten Falle ist nach § 3:

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = 3 - r \ldots -4 + r, \quad \text{folglich} \quad y_{n+1} = -\frac{1}{4-r} - \varepsilon_n \ldots r - \varepsilon_n.$$

Im zweiten Falle kommt:

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = 2 - r \ldots -4 + r, \quad \text{folglich} \quad y_{n+1} = -\frac{1}{4-r} - \varepsilon_n \ldots 1 - r - \varepsilon_n.$$

Nun bildet (x_{n+1}, y_{n+1}) ein reducirtes Paar, wenn n so gross gewählt wird, dass die für y_{n+1} gefundenen Intervalle ganz in den Intervallen $-1 + r \ldots r$ resp. $-r \ldots 1 - r$ enthalten sind. Dieses ist aber offenbar möglich.

II.) Es sei $y_0 - x_0 < 0$ und die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von x_0 endige nicht mit der Periode $(3, 3, \ldots)$. Da dieser Fall sofort auf den vorigen zurückgeführt werden kann, indem man statt der Reihe (57) die andere

$$(-x_0, -y_0), (-x_1, -y_1), \ldots, (-x_{n+1}, -y_{n+1}), \ldots$$

betrachtet, so ergiebt sich auch für diesen Fall das Resultat, dass in der Reihe (57) stets reducirte Paare vorkommen. Man hat hierbei zu beachten, dass das Paar (x, y) reducirt ist, wenn $(-x, -y)$ ein reducirtes Paar bilden, dass ferner $(x, y), (x', y')$ benachbarte Paare sind, wenn dies für $(-x, -y), (-x', -y')$ gilt.

III.) Es bleiben noch die Fälle zu untersuchen, in welchen $y_0 - x_0 > 0$ und die Entwicklung von x_0 mit der Periode $(-3, -3, \ldots)$ endigt, resp. $y_0 - x_0 < 0$ und die Entwicklung von x_0 mit der Periode $(3, 3, \ldots)$ endigt. Ich betrachte zuerst den speciellen Fall, wo $x_0 = (3, 3, \ldots) = 3 - r$ ist; lasse es dagegen unbestimmt ob $y_0 - x_0$ positiv oder negativ ist. Aus den Formeln des § 1 geht hervor, dass für den Kettenbruch

$$(60) \qquad x_0 = (3, 3, 3, \ldots) = 3 - r$$

die Gleichungen

$$(61) \qquad p_{n-1} = q_n, \qquad q_n = 3q_{n-1} - q_{n-2}, \qquad (q_0 = 1, q_1 = 3 \text{ etc.})$$

sowie

$$(62) \qquad x_{n+1} = 3 - r = x_0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

gelten. Nun ist

$$y_{n+1} - r = \frac{q_{n-1} y_0 - p_{n-1}}{q_n y_0 - p_n} - r = \frac{(q_{n-1} - r q_n) y_0 - (q_n - r q_{n+1})}{q_n y_0 - p_n};$$

und den Gleichungen (61) zufolge:

$$q_n - r q_{n+1} = q_n - r(3q_n - q_{n-1}) = r(q_{n-1} - r q_n) = r^n(q_0 - r q_1) = - r^{n+2}.$$

Daher ergiebt sich

$$(63) \qquad y_{n+1} - r = \frac{-r^{n+1}}{q_n} \cdot \frac{y_0 - r}{y_0 - \frac{p_n}{q_n}}.$$

Aus dieser Gleichung schliessen wir zunächst, weil $r < 1$ ist, dass $y_{n+1} - r$ mit wachsenden Werthen von n unendlich klein wird. Da nun ferner $\lim \frac{p_n}{q_n} = x_0 = 3 - r$ ist, so wird von einem bestimmten Werthe von n ab $y_{n+1} - r$ positiv, wenn

$$y_0 = (r) \ldots (3 - r),$$

dagegen negativ oder Null, wenn

$$y_0 = (3 - r) \ldots r.$$

Nur im letzteren Falle wird (x_{n+1}, y_{n+1}) von einem gewissen Werthe von n ab reducirt sein. Im ersteren Falle dagegen wird sich der Punkt (x_{n+1}, y_{n+1}) mit wachsenden Werthen von n freilich immer mehr dem Punkte $(3 - r, r)$ annähern, ohne ihn jedoch zu erreichen oder in das Gebiet R einzutreten.

Wenn nun x_0 nicht gleich $3 - r$ ist, aber eine Entwicklung besitzt, welche mit der Periode $(3, 3, \ldots)$ endigt, so wird in der Reihe (57) für einen gewissen Werth von m doch $x_{m+1} = 3 - r$ sein. Dann ist

$$x_0 = \frac{p_m x_{m+1} - p_{m-1}}{q_m x_{m+1} - q_{m-1}}, \qquad y_0 = \frac{p_m y_{m+1} - p_{m-1}}{q_m y_{m+1} - q_{m-1}},$$

und die Reihe (57) setzt sich von dem Paare (x_{m+1}, y_{m+1}) gerade so fort, als wenn man von diesem Paare ausgehen würde. Nun ist aber die Gleichung

$$y_{m+1} = (r) \ldots (3 - r)$$

dann und nur dann erfüllt, wenn

$$y_0 = \left(\frac{p_m r - p_{m-1}}{q_m r - q_{m-1}}\right) \ldots \left(\frac{p_m(3-r) - p_{m-1}}{q_m(3-r) - q_{m-1}}\right),$$

oder also, wenn

$$y_0 = (x'_0) \ldots (x_0)$$

ist, wo x'_0 die zu x_0 conjugirte algebraische Zahl bedeutet. Es ergiebt sich daher der folgende Satz:

Endigt die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von x_0 mit der Periode $(3, 3, \ldots)$, *so sind die in der Reihe*

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$$

auftretenden Paare (x_n, y_n) von einem bestimmten Werthe von n ab sämmtlich reducirt oder sämmtlich nicht reducirt, je nachdem

$$y_0 = (x_0) \ldots x'_0,$$

oder

$$y_0 = (x'_0) \ldots (x_0)$$

ist. Dabei bedeutet x'_0 die zweite Wurzel der ganzzahligen quadratischen Gleichung, welcher x_0 genügt.

Wir können diesem Satze noch die Bemerkung hinzufügen, dass nothwendig $x_0 > x'_0$ ist. Denn nach der unter I.) angestellten Untersuchung müssen die Werthe von y_0, welche grösser als x_0 sind, sich sämmtlich in dem Intervalle $(x_0) \ldots x'_0$ befinden, was nur in dem Falle $x_0 > x'_0$ möglich ist.

Wenn von einem bestimmten Werthe von n ab die Theilnenner a_n in der Entwicklung von x_0 sämmtlich gleich -3 sind, so leiten wir aus der Reihe

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots$$

die andere

$$(-x_0, -y_0), (-x_1, -y_1), \ldots$$

ab, auf welche offenbar der vorhergehende Satz Anwendung findet.

Da nun aus der Gleichung

$$-y_0 = -x_0' \ldots -x_0,$$

die andere

$$y_0 = x_0 \ldots x_0'$$

und umgekehrt die erstere aus der letzteren folgt, so ergiebt sich ohne Weiteres:

Endigt die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von x_0 mit der Periode $(-3, -3, \ldots)$, so sind die in der Reihe

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$$

auftretenden Paare (x_n, y_n) von einem bestimmten Werthe von n ab sämmtlich reducirt oder sämmtlich nicht reducirt, je nachdem

$$y_0 = x_0' \ldots (x_0)$$

oder

$$y_0 = (x_0) \ldots (x_0')$$

ist. Dabei bedeutet x_0' die zweite Wurzel der ganzzahligen quadratischen Gleichung, welcher x_0 genügt.

Zugleich ist nothwendig $x_0 < x_0'$, da nach der dem vorigen Satze hinzugefügten Bemerkung $-x_0 > -x_0'$ sein muss. Beiläufig folgt hieraus ein Criterium dafür, ob eine zu r äquivalente Zahl x_0 eine Kettenbruch-Entwicklung liefert, welche mit der Periode $(3, 3, \ldots)$ oder mit der Periode $(-3, -3, \ldots)$ endigt. Im ersteren Falle muss nämlich $x_0 - x_0' > 0$, im letzteren Falle $x_0 - x_0' < 0$ sein.

Setzen wir $x_0 = \frac{\alpha r - \beta}{\gamma r - \delta}$, so ist $x_0' = \frac{\alpha \frac{1}{r} - \beta}{\gamma \frac{1}{r} - \delta}$ und daher

$$x_0 - x_0' = \frac{r - \frac{1}{r}}{(\gamma r - \delta)\left(\gamma \frac{1}{r} - \delta\right)} = \frac{-\sqrt{5}}{\gamma^2 - 3\gamma\delta + \delta^2},$$

so dass unser Criterium sich in folgender Weise aussprechen lässt:

Die zu r äquivalente Grösse

$$\frac{\alpha r - \beta}{\gamma r - \delta}$$

hat eine Entwicklung erster Art, welche mit der Periode

$$(-3, -3, \ldots) \quad oder \quad (3, 3, \ldots)$$

endigt, je nachdem

$$\gamma^2 - 3\gamma\delta + \delta^2$$

eine positive oder eine negative Zahl ist.

Kehren wir nun zu der Betrachtung der Reihe (57) zurück, so bleibt nur noch Folgendes zu bemerken. Wenn die Entwicklung erster Art von x_0 weder mit der Periode $(3, 3, \ldots)$ noch mit der Periode $(-3, -3, \ldots)$ endigt, oder, was dasselbe besagt, wenn x_0 nicht zu r äquivalent ist, so finden die unter I.) und II.) angestellten Betrachtungen Anwendung. Es gilt daher der Satz:

Ist die Grösse x_0 nicht der Zahl $r = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ äquivalent, so sind die in der Reihe

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$$

auftretenden Paare (x_n, y_n) von einem bestimmten Werthe von n ab sämmtlich reducirt.

§ 8. *Reihen reducirter Zahlenpaare.*

Wenn das Paar (x_0, y_0) reducirt ist, so ist sein rechter Nachbar (x_1, y_1) ebenfalls reducirt. Denn sei in den Gleichungen

$$(64) \qquad \begin{cases} x_0 = a_0 - \frac{1}{x_1} \\ y_0 = a_0 - \frac{1}{y_1} \end{cases}$$

(x_0, y_0) ein reducirtes Paar. Dann sind nur folgende Fälle möglich:

1.) $x_0 = 3 - r$, $y_0 = r$, folglich $x_1 = 3 - r$, $y_1 = r$.

2.) $x_0 = -3 + r$, $y_0 = -r$, folglich $x_1 = -3 + r$, $y_1 = -r$.

3.) $x_0 = 2 \ldots \infty$, $x_1 = 2 \ldots \infty$, folglich

$$a_0 = 3, 4, \ldots, \quad y_0 = (-1 + r) \ldots (r) \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{1}{a_0 - y_0} = (0) \ldots (r).$$

4.) $x_0 = -\infty \ldots -2$, $x_1 = 2 \ldots \infty$, folglich

$$a_0 = -2, -3, \ldots, \quad y_0 = (-r) \ldots (1 - r)$$

$$\text{und} \quad y_1 = \frac{1}{a_0 - y_0} = (-1 + r) \ldots (0),$$

5.) $x_0 = 2 \ldots \infty$, $x_1 = -\infty \ldots -2$, folglich

$$a_0 = 2, 3, \ldots, \quad y_0 = (-1 + r) \ldots (r) \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{1}{a_0 - y_0} = (0) \ldots (1 - r),$$

6.) $x_0 = -\infty \ldots -2$, $x_1 = -\infty \ldots -2$, folglich

$$a_0 = -3, -4, \ldots, \quad y_0 = (-r) \ldots (1 - r) \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{1}{a_0 - y_0} = (-r) \ldots (0).$$

In allen Fällen ist also (x_1, y_1) wieder ein reducirtes Paar. Hieraus folgt, dass die im letzten Paragraphen betrachteten Reihen

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$$

lauter reducirte Paare enthalten, wenn das Ausgangspaar (x_0, y_0) ein reducirtes ist und allgemeiner, dass in der Reihe die Paare $(x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}), \ldots$ bis in's Unendliche reducirt sind, falls (x_n, y_n) ein reducirtes Paar ist.

Wenn man die zweite Gleichung (64) in die Form setzt

$$\frac{1}{y_1} = a_0 - \frac{1}{\left(\frac{1}{y_0}\right)},$$

und annimmt (x_0, y_0) und also auch (x_1, y_1) sei reducirt, so erkennt man, dass a_0 die erste Zahl ist, welche bei der Entwicklung von $\frac{1}{y_1}$ in einen Kettenbruch zweiter Art auftritt. Daher ist das Paar (x_0, y_0) vollständig bestimmt, wenn (x_1, y_1) gegeben ist, oder in Worten: Jedes reducirte Paar besitzt einen vollständig bestimmten linken Nachbarn, welcher ebenfalls

ein reducirtes Paar ist. Die Ergebnisse dieser Betrachtungen können wir folgendermassen aussprechen:

Jedes reducirte Paar ist Glied einer unbegrenzt nach rechts und nach links fortsetzbaren Reihe von reducirten Paaren, von welchen jedes dem vorhergehenden nach rechts benachbart ist. Die ganze Reihe von Paaren lässt sich in eindeutiger Weise aus irgend einem Paare der Reihe erzeugen, und wenn

(65) $$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1}), \ldots$$

auf einander folgende Glieder der Reihe sind, so stellen die Gleichungen

(66) $$\begin{cases} x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}) \\ \dfrac{1}{y_{n+1}} = \left(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0, \dfrac{1}{y_0}\right) \end{cases}$$

die Kettenbruch-Entwicklungen erster bez. zweiter Art von x_0 bez. $\frac{1}{y_{n+1}}$ dar.

§ 9. *Quadratische Formen.*

Bezeichnet

(67) $$au^2 + 2buv + cv^2$$

eine quadratische Form der positiven Determinante

(68) $$D = b^2 - ac,$$

so nenne ich die Wurzeln

(69) $$x_0 = \frac{-b - \sqrt{D}}{c}, \qquad y_0 = \frac{-b + \sqrt{D}}{c}$$

der Gleichung

$$a + 2bx + cx^2 = 0$$

die erste bez. zweite Wurzel der Form, wobei $\sqrt{D}$ den positiven Werth der Quadratwurzel bedeutet. Zwei Formen sind bekanntlich dann und nur dann äquivalent, wenn sie dieselbe Determinante besitzen und wenn zugleich ihre ersten Wurzeln äquivalente Grössen sind. Die in den vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Begriffe übertragen sich sofort auf

quadratische Formen; nämlich: eine quadratische Form heisst »reducirt», wenn ihre Wurzeln (x_0, y_0) ein reducirtes Paar bilden, und: zwei Formen derselben Determinante heissen »benachbart», wenn ihre Wurzelpaare benachbart sind. Solche benachbarte Formen sind offenbar äquivalent.

Es seien nun a, b, c ganze Zahlen und $D = b^2 - ac$ kein vollständiges Quadrat. Bilden wir dann von dem Paare (x_0, y_0) ausgehend die Reihe der benachbarten Paare:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1}), \ldots,$$

so wird (x_{n+1}, y_{n+1}) von einem bestimmten n ab reducirt sein. Dies gilt nach den Sätzen des § 7 allgemein, selbst in dem Falle wo x_0 zu r äquivalent ist, weil dann y_0 die zweite Wurzel der ganzzahligen quadratischen Gleichung ist, welcher x_0 genügt. Es folgt also:

Jede quadratische Form (67) *ist einer reducirten äquivalent. Entwickelt man nämlich die erste Wurzel der Form in einen Kettenbruch erster Art*

$$x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}),$$

so wird von einem bestimmten Werthe von n ab, die Grösse x_{n+1} stets erste Wurzel einer reducirten Form sein, und die Form (67) *wird durch die Substitution*

$$u = p_n u' - p_{n-1} v', \qquad v = q_n u' - q_{n-1} v'$$

in diese reducirte Form übergehen.

Betrachten wir nun die reducirten Formen einer gegebenen Determinante D, so zeigt sich zunächst, *dass nur eine endliche Anzahl solcher Formen existirt.* Nach der Definition hat man nämlich für die Wurzeln x_0, y_0 einer reducirten Form entweder

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 2 \ldots \infty \\ y_0 = -1 + r \ldots r \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} x_0 = -\infty \ldots -2 \\ y_0 = -r \ldots 1 - r \end{array}\right\},$$

und hieraus

$$\frac{-2\sqrt{D}}{c} = x_0 - y_0 = 2 - r \ldots -2 + r,$$

$$\frac{2\sqrt{D}}{a} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{y_0} = 2 - r \ldots -2 + r.$$

Daher liegen die ganzen Zahlen a und c in dem Intervall

$$-2\sqrt{D}(1-r)\ldots+2\sqrt{D}(1-r),$$

und können also, ebenso wie $b=\pm\sqrt{D+ac}$ nur eine endliche Anzahl von Werthen besitzen. Hieraus folgt unmittelbar, dass es nur endlich viele reducirte Formen der Determinante D giebt. Bilden wir von dem Wurzelpaar (x_0, y_0) einer reducirten Form f ausgehend die Reihe der nach rechts benachbarten Paare

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1}), \ldots,$$

so ist jedes Glied dieser Reihe Wurzelpaar einer reducirten zu f äquivalenten Form. Da nun die Anzahl dieser Formen endlich und die Reihe nach rechts wie nach links eindeutig fortsetzbar ist, so ergiebt sich:

Die reducirten Formen der Determinante D gruppiren sich in »Perioden« unter einander äquivalenter.

Ferner folgt aus dem Satze des letzten Paragraphen:

Bezeichnet x_0 die erste Wurzel einer reducirten Form, so ist die Entwicklung erster Art von x_0 rein periodisch, also von der Gestalt

$$x_0=(a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots),$$

und der reciproke Werth der zweiten Wurzel ist vermöge der Gleichung

$$\frac{1}{y_0}=(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0, \ldots)$$

in einen Kettenbruch zweiter Art entwickelt.

Verbinden wir mit diesem Resultate den in diesem Paragraphen an erster Stelle hervorgehobenen Satz, so folgt:

Die Kettenbruch-Entwicklung erster Art einer quadratischen Irrationalität ist stets periodisch. Dieselbe wird nach dem vorigen Satze *rein* periodisch, wenn die Irrationalität erste Wurzel einer reducirten Form ist. Man bemerkt leicht, dass dieses auch der einzige Fall ist, in welchem dieser Umstand eintritt.

Nach den Ergebnissen des § 6 gehen die Kettenbruch-Entwicklungen

erster Art zweier äquivalenter Grössen stets durch Abänderung einer endlichen Anzahl von Theilnennern aus einander hervor. Eine Ausnahme erleidet dieser Satz nur dann, wenn die beiden Grössen zu r äquivalent sind und die Entwicklung der einen mit der Periode $(3, 3, \ldots)$, die Entwicklung der andern mit der Periode $(-3, -3, \ldots)$ endigt. Lassen wir daher stets diejenigen Formenperioden bei Seite, welche von Formen mit den Wurzeln $x_0 = -3 + r$, $y_0 = -r$ gebildet werden, so besteht der Satz:

Zwei reducirte Formen der Determinante D sind äquivalent oder nicht, je nachdem sie derselben oder verschiedenen Formenperioden angehören.

Die Auflösung der Pell'schen Gleichung kommt bekanntlich darauf zurück, alle Substitutionen einer reducirten Form in sich zu finden. Oder, was dasselbe ist, alle Äquivalenzgleichungen

$$x_0 = \frac{\alpha x_0 - \beta}{\gamma x_0 - \delta} \tag{70}$$

aufzustellen, wenn x_0 die erste Wurzel einer reducirten Form bezeichnet.

Entwickelt man nun x_0 in einen Kettenbruch erster Art, und betrachtet die hierbei auftretenden Gleichungen

$$x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_0), \qquad x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0, a_1, \ldots, a_n, x_0), \ldots, \tag{71}$$

so sind dieselben sämmtlich von der Form (70). Man erhält aber auf diese Weise auch alle überhaupt existirenden Gleichungen (70). Falls x_0 nicht zu r äquivalent ist, folgt dieses aus dem ersten Satze des § 6. Wenn aber x_0 zu r äquivalent und folglich gleich $3 - r$ oder gleich $-3 + r$ ist, so muss man den Nachweis direct führen, was keine Schwierigkeit hat und deshalb Kürze halber hier unterbleiben mag. Bekanntlich entstehen die Gleichungen (71) sämmtlich durch Iteration der ersten Gleichung

$$x_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, x_0),$$

welche die kleinste Lösung der Pell'schen Gleichung ergiebt.

Durch die Sätze dieses Paragraphen ist, wie man sieht, die Theorie der quadratischen Formen von positiver Determinante in ähnlicher Weise auf die hier betrachtete Kettenbruch-Entwicklung erster Art gegründet,

wie man dieselbe sonst auf die gewöhnliche nach grössten Ganzen fortschreitende Kettenbruch-Entwicklung zu gründen pflegt. Es ist noch zu bemerken, dass die erhaltenen Resultate sich nur unerheblich modificiren, wenn man überall die Worte »erster Art» und »zweiter Art» mit einander vertauscht.

§ 10. *Entwicklungen für die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl.*

Es bezeichne D eine positive ganze Zahl, welche kein vollständiges Quadrat ist, und es seien

$$(72)\qquad \left|\begin{array}{l}\sqrt{D} = (a_0\,, a_1\,, \ldots) \\ \sqrt{D} = (b_0\,, b_1\,, \ldots)\end{array}\right.$$

die Kettenbruch-Entwicklungen erster und zweiter Art von $\sqrt{D}$. Dann werden die Zahlen $a_0\,, b_0$ durch die Gleichungen

$$(73)\qquad \begin{array}{l}\sqrt{D} = a_0 - \frac{1}{2} \ldots a_0 + \frac{1}{2}, \\ \sqrt{D} = b_0 - r \ldots b_0 - r + 1.\end{array}$$

bestimmt sein. Daraus folgt sofort, dass die Paare

$$(74)\qquad \left.\begin{array}{l} x_0 = \sqrt{D} + b_0 \\ y_0 = -\sqrt{D} + b_0 \end{array}\right\}, \qquad \left|\begin{array}{l} x_0' = \dfrac{-1}{\sqrt{D} - a_0} \\ y_0' = \dfrac{1}{\sqrt{D} + a_0} \end{array}\right|$$

reducirt sind. Daher sind die Kettenbruch-Entwicklungen erster Art von x_0 und x_0' rein periodisch; also etwa

$$(75)\quad x_0 = \sqrt{D} + b_0 = (a_0 + b_0\,, a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n\,, a_0 + b_0\,, a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n\,, \ldots),$$

aus welcher Entwicklung unmittelbar die andere

$$(76)\quad x_0' = \frac{-1}{\sqrt{D} - a_0} = (a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n\,, a_0 + b_0\,, a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n\,, a_0 + b_0\,, \ldots)$$

hervorgeht. Nun entsteht die Entwicklung zweiter Art von $\frac{1}{y_0'} = \sqrt{D} + a_0$ aus der Entwicklung erster Art von x_0' durch Umkehrung der Periode. Also ist

$$(77)\quad \sqrt{D} + a_0 = (a_0 + b_0, a_n, a_{n-1}, \ldots . a_1, a_0 + b_0, a_n, \ldots, a_1, \ldots)$$

die Entwicklung zweiter Art von $\sqrt{D} + a_0$. Die Gleichungen (75) und (77) ergeben den Satz:

Die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl D besitzt Kettenbruch-Entwicklungen erster und zweiter Art von der Gestalt:

$$(78)\quad \begin{cases} \sqrt{D} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0 + b_0, a_1, \ldots, a_n, a_0 + b_0, \ldots) \\ \sqrt{D} = (b_0, a_n, \ldots, a_1, a_0 + b_0, a_n, \ldots, a_1, a_0 + b_0, \ldots). \end{cases}$$

Die Periode beginnt also (wie in der gewöhnlichen Theorie) bei beiden Entwicklungen sogleich nach dem ersten Theilnenner. Sie schliesst bei beiden ab mit der Summe $a_0 + b_0$ der Anfangsglieder der Entwicklungen. Durch Umkehrung der übrigen Glieder der Periode geht die eine Entwicklung in die andere über.

Aus den Gleichungen (73) geht hervor, dass entweder $a_0 = b_0$ oder $a_0 = b_0 + 1$ ist. Denn in das Intervall $a_0 - \frac{1}{2} \ldots a_0 + \frac{1}{2}$ greifen nur die beiden Intervalle $a_0 - r \ldots a_0 - r + 1$ und $a_0 - 1 - r \ldots a_0 - r$ hinein; jedes andere Intervall $b_0 - r \ldots b_0 - r + 1$ hat keinen Punkt mit $a_0 - \frac{1}{2} \ldots a_0 + \frac{1}{2}$ gemein (vgl. Fig. 1). Unterscheidet man die beiden Fälle, so erhält man den Satz:

Bestimmt man die ganze Zahl a_0 so, dass $\sqrt{D}$ zwischen $a_0 - \frac{1}{2} \ldots a_0 + \frac{1}{2}$ liegt, so sind zwei Fälle möglich: entweder $\sqrt{D}$ ist grösser als $a_0 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ oder $\sqrt{D}$ ist kleiner als $a_0 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Im ersteren Falle sind die Zahlen a_0, b_0, mit welchen die Entwicklungen (78) *beginnen, einander gleich. Im letzteren Falle ist dagegen $a_0 = b_0 + 1$.*

Nur im ersten Falle haben also die Entwicklungen (78) dieselbe Eigenschaft, wie die gewöhnlich betrachtete Entwicklung, dass nämlich das Schlussglied der Periode das doppelte von dem Anfangsgliede der Entwicklung ist. Freilich scheint dieser erste Fall weit häufiger einzutreten als der zweite Fall. Der erste Werth von D in der Reihe $D = 2, 3, 5, \ldots$, für welchen der zweite Fall eintritt, ist der Werth $D = 13$. Man findet nämlich für die Entwicklungen erster und zweiter Art von $\sqrt{13}$ bezüglich:

$$(79)\quad \begin{cases} \sqrt{13} = (4;\ 3,\ 2, -7, -3, -2, 7;\ 3,\ 2, -7, -3, -2, 7; \ldots) \\ \sqrt{13} = (3; -2, -3, -7,\ 2,\ 3, 7; -2, -3, -7,\ 2,\ 3, 7; \ldots). \end{cases}$$

Wenn $a_0 = b_0$ ist, so kann man aus der Gleichung

$$\sqrt{D} - a_0 = (0, a_1, \ldots) = (0, a_n, \ldots)$$

schliessen, dass entweder $a_1 = a_n$ oder $a_1 = a_n + 1$ ist. Im Falle, dass $a_1 = a_n$ ist, folgert man weiter, dass entweder $a_2 = a_{n-1}$ oder $a_2 = a_{n-1} + 1$ ist, u. s. f. Hiernach kann unter Umständen die Reihe $a_1, \ldots, a_n$ symmetrisch, d. h. mit der Reihe $a_n, \ldots, a_1$ identisch sein. Dies wird stets dann stattfinden, wenn die Entwicklung erster Art von $\sqrt{D}$ mit der Entwicklung zweiter Art zusammenfällt. Betrachten wir nun einen solchen Werth von D, für welchen $\sqrt{D}$ mit $-\sqrt{D}$ äquivalent ist. Dann ist auch $\sqrt{D} + b_0$ mit $-\sqrt{D} - b_0$ äquivalent und es treten folglich diese beiden Zahlen in ein und derselben Formenperiode auf. Wir haben daher, wenn wir Gleichförmigkeit halber a_{n+1} für $a_0 + b_0$ schreiben, folgende Entwicklungen erster Art:

$$\sqrt{D} + b_0 = (a_{n+1}, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

$$-\sqrt{D} - b_0 = (a_r, a_{r+1}, \ldots, a_{r+n}, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_{r+n}, \ldots),$$

wo $r \leq n$ angenommen werden darf und die Indices von a, welche grösser als $n + 1$ werden (mod. $n + 1$) zu reduciren sind. Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$\sqrt{D} + b_0 = (a_{n+1}, a_1, \ldots, a_{r-1}, -\sqrt{D} - b_0),$$

also auch

$$-\sqrt{D} - b_0 = (-a_{n+1}, -a_1, \ldots, -a_{r-1}, \sqrt{D} + b_0)$$

und folglich durch Elimination von $-\sqrt{D}-b_0$:

$$(80) \quad \sqrt{D}+b_0=(a_{n+1}, a_1, \ldots, a_{r-1}, -a_{n+1}, -a_1, \ldots, -a_{r-1}, \sqrt{D}+b_0).$$

Daher müssen die $2r$ Zahlen $a_{n+1}, a_1, \ldots, a_{r-1}, -a_{n+1}, -a_1, \ldots, -a_{r-1}$ eine Periode $a_{n+1}, \ldots, a_n$ oder eine Zusammenfassung mehrerer solcher Perioden bilden. Da aber $r \leqq n$ vorausgesetzt wurde, so ist nur der erste Fall möglich. Setzen wir $a_{n+1}=-a_r$ so folgt aus (80):

$$\sqrt{D}+b_0=(-a_r, a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r, -a_1, -a_2, \ldots, -a_{r-1}; -a_r, a_1, \ldots),$$

wo die vor dem Semikolon stehenden Glieder die Periode bilden. Gehen wir endlich von $\sqrt{D}+b_0$ zu $\sqrt{D}$ selber zurück, so erhalten wir den Satz:

Wenn der Werth von $\sqrt{D}$ zu dem Werthe von $-\sqrt{D}$ äquivalent ist, so besitzt die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von $\sqrt{D}$ die Gestalt:

$$(81) \quad \sqrt{D}=(a_0; a_1, a_2, \ldots, a_r, -a_1, -a_2, \ldots, -a_r; a_1, a_2, \ldots),$$

wo die zwischen die beiden Semikolon gesetzten Glieder

$$a_1, a_2, \ldots, a_r, -a_1, -a_2, \ldots, -a_r$$

die Periode bilden.

Die Voraussetzung dieses Satzes lässt sich noch umformen. Wenn nämlich $\sqrt{D}$ zu $-\sqrt{D}$ äquivalent ist, so besteht eine Gleichung der Form

$$(82) \qquad -\sqrt{D}=\frac{\alpha\sqrt{D}-\beta}{\gamma\sqrt{D}-\delta}, \qquad (\beta\gamma-\alpha\delta=1).$$

Wegen der Irrationalität von $\sqrt{D}$ folgt aus dieser Gleichung

$$\alpha=\delta, \qquad \beta=\gamma D,$$

und also befriedigen, da $\alpha\delta-\beta\gamma=-1$ ist, die Zahlen $x=\alpha, y=\gamma$ die Gleichung

$$(83) \qquad x^2-Dy^2=-1.$$

Umgekehrt leitet man aus einer Lösung $x=\alpha, y=\gamma$ dieser Gleichung sofort eine Relation der Gestalt (82) ab. Daher können wir sagen:

Die Voraussetzung des vorigen Satzes lässt sich durch die andere ersetzen, dass die Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = -1$$

eine Auflösung in ganzen Zahlen besitzt.

Wenn die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von $\sqrt{D}$ die Gestalt (81) hat, so liefert die Entwicklung der Gleichung

$$-\sqrt{D} + a_0 + a_r = (a_r\,,\,-a_1\,,\,\ldots,\,-a_{r-1}\,,\,\sqrt{D} - a_0 - a_r),$$

eine Relation der Form (82) und damit eine Auflösung der Gleichung (83).

Es ist leicht zu zeigen, dass aus dieser einen Auflösung alle übrigen abgeleitet werden können, ähnlich wie dies für die Kettenbruch-Entwicklung von $\sqrt{D}$, welche nach grössten Ganzen fortschreitet, geschieht.

Königsberg i. Pr. 15. December 1888.

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 12. — 1888–1889. — TOME 12.



CORRECTION.

Page 179, dernière ligne. *Au lieu de*

$$Ax_0p + By_0q + Cz_0r = l,$$

lire

$$A\gamma p + B\gamma' q + C\gamma'' r = l.$$



Nous avons le devoir douloureux d'annoncer à nos lecteurs la mort de notre collaborateur dans la rédaction des Acta mathematica

M. O.-J. BROCH.

M. **Broch,** né à Fredriksstad en Norvège le 14 janvier 1818, est mort à Sèvres le 5 février 1889. Il a été attaché comme professeur à l'université de Christiania depuis l'année 1848 jusqu'à sa mort, sauf une interruption de 1869 à 1872, époque pendant laquelle il fut ministre de la marine en Norvège. Depuis l'année 1879 et jusqu'à sa mort il était chef du bureau international des poids et mesures à Sèvres.

Ses travaux mathématiques les plus importants sont:

Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendentes (Journal de Crelle, T. 20);

Mémoire sur les fonctions de la forme

$$\int x^{s-yp-1} f(x^p)[R(x^p)]^{\pm\frac{s}{rp}} dx$$

(Journal de Crelle, T. 23);

Allgemeine Gesetze der Wellenbewegung (Dove's Repertorium, Bd. 5);

Besondere Gesetze der Wellenbewegung (Dove's Repertorium, Bd. 7);

Lovene for Lysets Forplantelse i isophane og eenaxig krystaliserede Legemer, Christiania 1847;

Traité élémentaire des fonctions elliptiques, Christiania 1867.

Il a de même publié une série de mémoires remarquables dans les publications du bureau international des poids et mesures. On lui doit encore plusieurs livres excellents pour l'enseignement élémentaire ainsi que des livres de grande valeur sur la statistique.

Si M. **Broch** était un homme de science des plus éminents il était en même temps homme d'état et homme pratique, et il a rendu maints services de la plus haute valeur et de natures très diverses à sa patrie qu'il aimait de toute son âme et dont il était un des fils les plus nobles et les plus éminents.

MITTAG-LEFFLER.



